数学C

第２章　「式と曲線」

20. 極座標入門

hmc-2-20

(pdf ファイル)

式と曲線（2）学習マップ

曲線の表示の理論

- 方程式（直交座標）
- 媒介変数表示
- 極座標と極方程式
- 直交座標↔極座標

具体的曲線論

- 動点の軌跡
- 円・楕円・双曲線の媒介変数表示

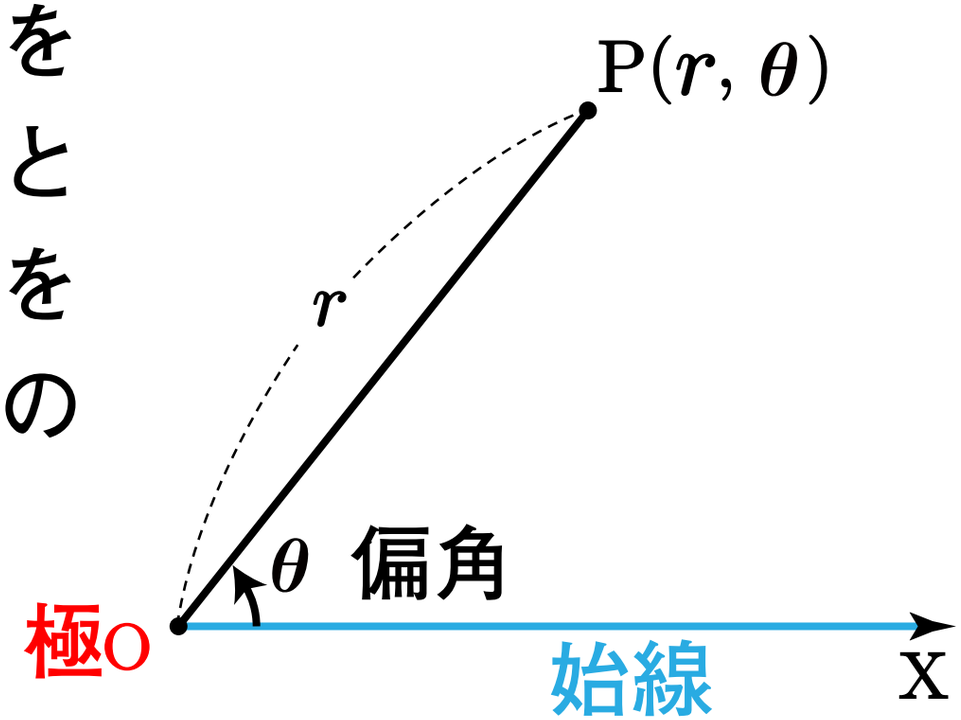
- いろいろな曲線
  - ・サイクロイド
  - ・リサジュー曲線
  - ・正葉曲線
  - ・螺旋
  - ・カージオイド

【発展】やや進んだ曲線論
  - ・外サイクロイド
  - ・内サイクロイド
  - ・蝸牛線

極座標（polar coordinate）

平面上に点Oと半直線OXを定めると，任意の点Pの位置は Oからの距離 r と 動径OPのOXからの回転角 θ によって決まる．

この2つの実数の組 (r, θ) を点Pの **極座標** といい，基準となる点Oを **極**，半直線OXを **始線** という．また，θ を点Pの **偏角** という．



極座標についての注意

◪　$r > 0$ のとき，任意の整数 n に対して，$(r,\ \theta)$ と $(r,\ \theta + 2n\pi)$ は同じ点を表すので，点を表す極座標は１つに定まらない．しかし，偏角 θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ に制限すれば，極座標 $(r,\ \theta)$ はただ１つに決まる．

◪　$r = 0$ のときは θ の値によらず，点 $(0,\ \theta)$ は極Oを表す．

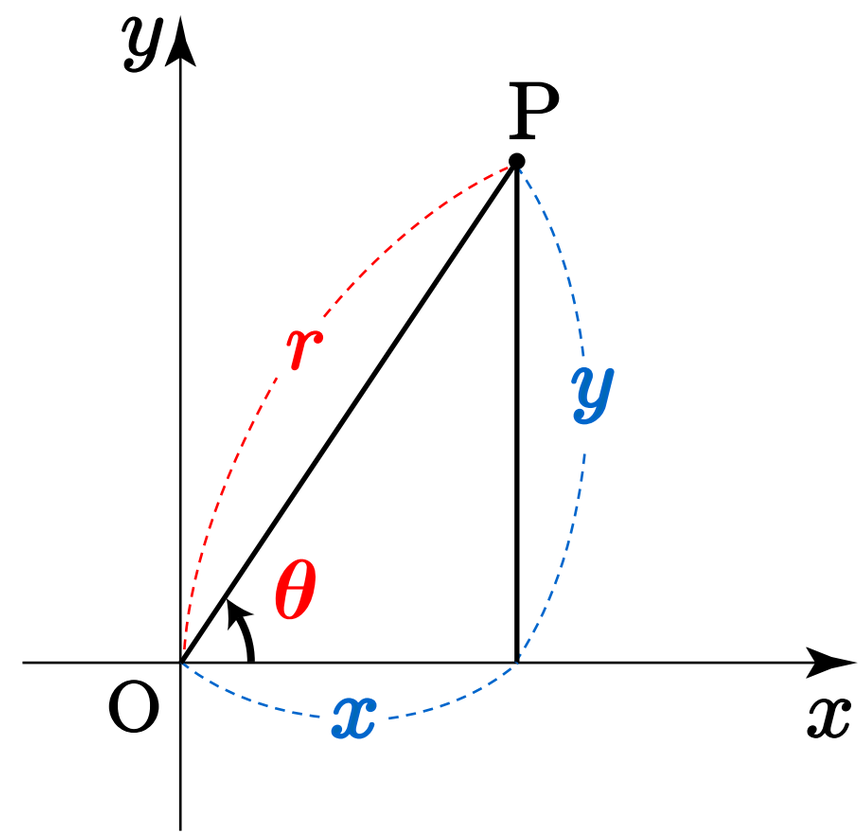
◪　点Oからの距離は本来は0以上であるが，極座標において,「点 $(r,\ \theta)$ は点 $(-r,\ \theta + \pi)$ と一致する」という特別の約束をすることにより，$r < 0$ の場合も考えることができる．

極座標と直交座標

直交座標の原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標を考える．

点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次の関係が成り立つ．

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

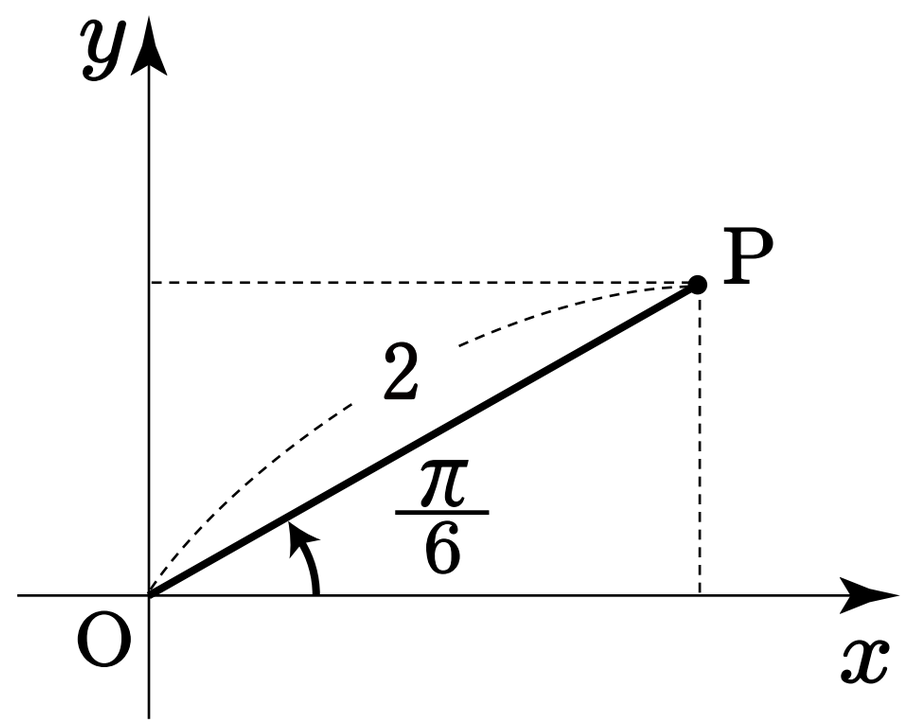


極座標→直交座標の変換例

極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ である点Pの直交座標は

$(\qquad\qquad,\qquad\qquad)$

すなわち，$(\qquad,\qquad)$



直交座標→極座標の変換例

$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，直交座標が $(-2,\ 2)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めてみよう．

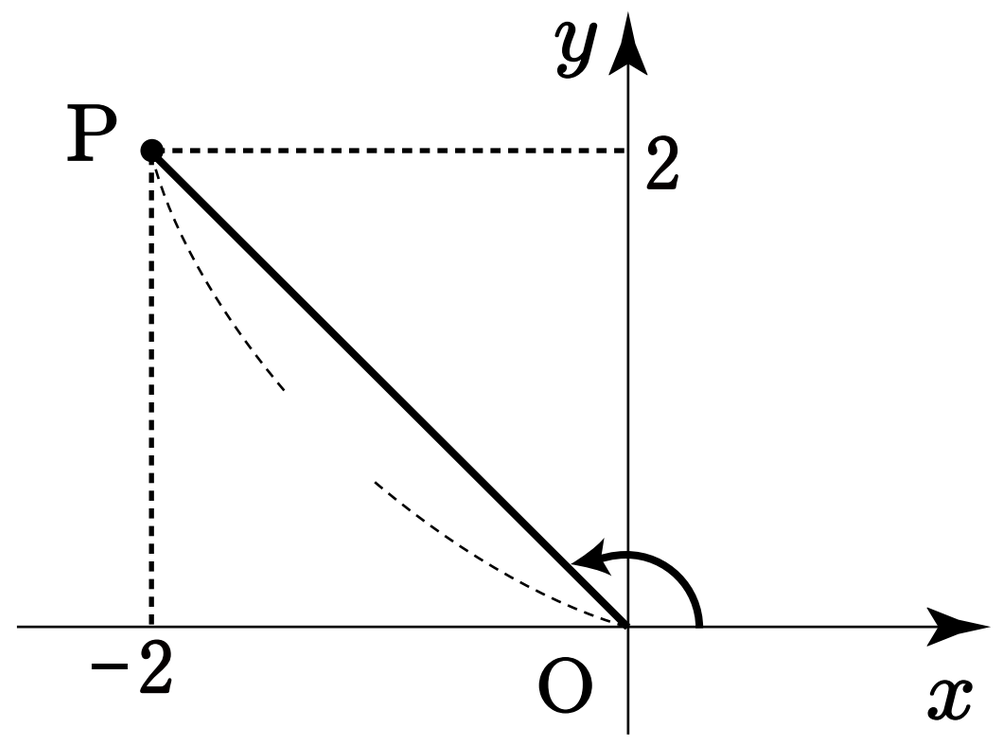
$r =$

$\cos\theta =$

$\sin\theta =$

これより，$\theta =$

ゆえに，P の極座標は



2点間の距離の公式

極座標で表された2点 $\mathrm{A}(r_1,\ \theta_1), \mathrm{B}(r_2,\ \theta_2)$ の間の距離を求めよう.

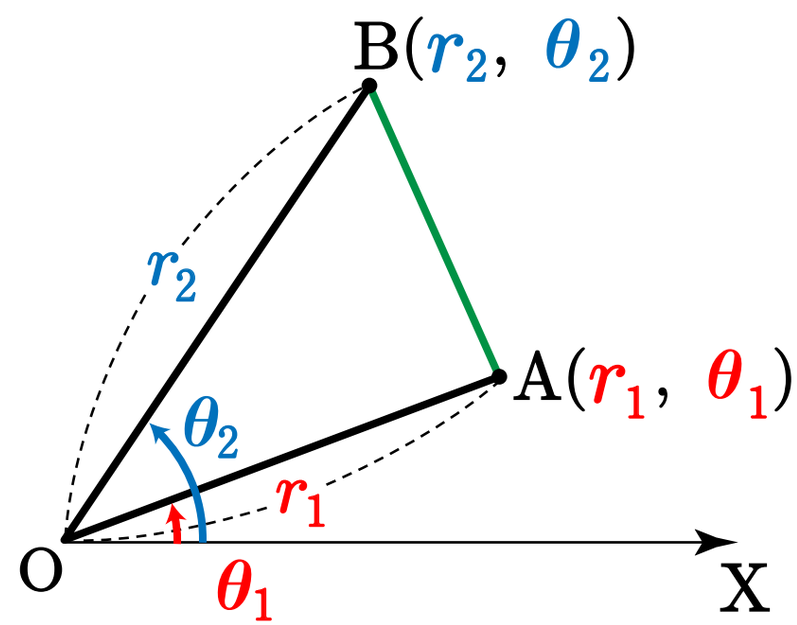
△OABにおいて，余弦定理から，

$$\mathrm{AB}^2 =$$

よって，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

注 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r_1(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = r_2(\cos\theta_2,\ \sin\theta_2)$

から $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を計算することもできる.