数学C

第２章　「式と曲線」

13. 媒介変数表示

hmc-2-13

(pdf ファイル)

式と曲線（2）学習マップ

曲線の表示の理論

- 方程式（直交座標）
- 媒介変数表示
- 極座標と極方程式
- 直交座標↔極座標

具体的曲線論

- 動点の軌跡
- 円・楕円・双曲線の
 媒介変数表示
- いろいろな曲線
 - ・サイクロイド
 - ・リサジュー曲線
 - ・正葉曲線
 - ・螺旋
 - ・カージオイド

【発展】やや進んだ曲線論

- ・外サイクロイド
- ・内サイクロイド
- ・蝸牛線

曲線の媒介変数表示に向けて

点Pの座標 $(x,\ y)$ が変数 t を用いて

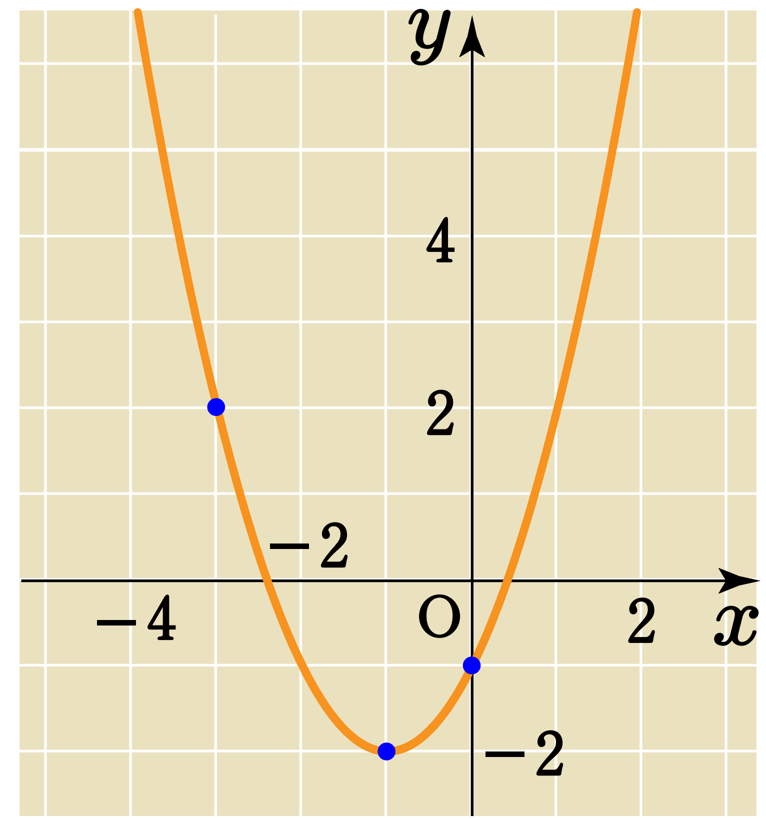
$$x = 2t - 1,\quad y = 4t^2 - 2$$

で表されているとする.

このとき，例えば，t に $-1, 0, \dfrac{1}{2}$ を代入すると，Pの座標がそれぞれ，

(　　，　　), (　　，　　), (　　，　　)

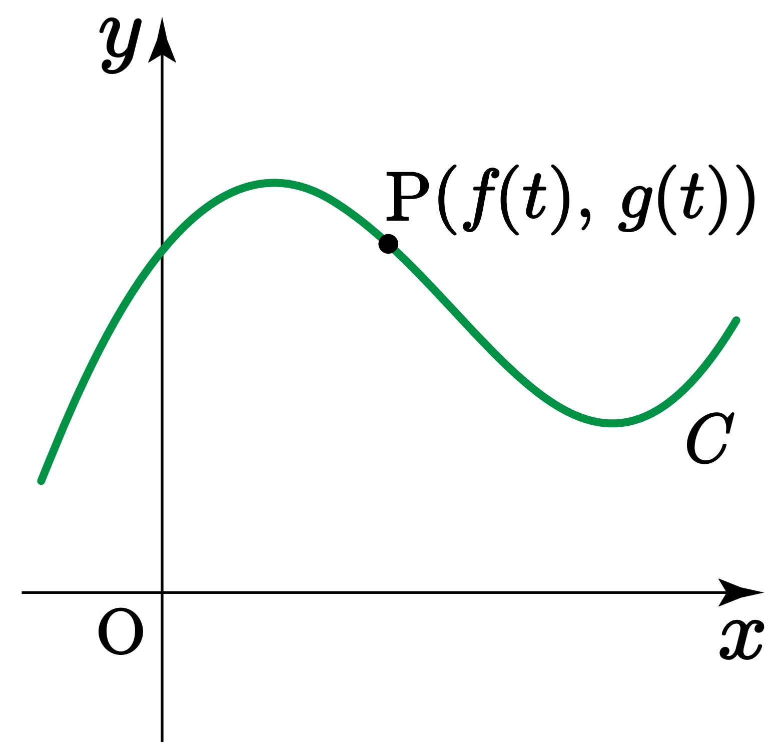
となる.



このように，t を変化させて，これらの点を座標平面上にとっていくことにより，Pがどのような曲線を描くかを予想することができる.

媒介変数表示

一般に，曲線 C 上の点の座標 $(x,\ y)$ が，変数 t の関数として



$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

で与えられているとき，これを，t を **媒介変数** とする C の **媒介変数表示** という.

媒介変数 t を，時刻を表す変数とみなせば，**時刻 t における点の座標** を与えることによって，媒介変数表示は，**曲線を描く点の運動** を表していると考えることができる.

媒介変数の“消去”

t を媒介変数として,

$$x = 2t - 1, \quad y = 4t^2 - 2 \qquad \cdots ①$$

と表される曲線の方程式を求めるには,

i) ① の第1式を t について解いて

$$t =$$

を導き,

ii) これを第2式に代入して t を“消去”することによって

とすればよい．こうして，① の表す図形：

放物線 $y = (x+1)^2 - 2$

がわかる．この形では，点の“運動”はわからない．

例題

放物線 $y=x^2+4tx+4t$ の頂点Pは，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか.

【解】放物線の方程式の右辺を平方完成すると

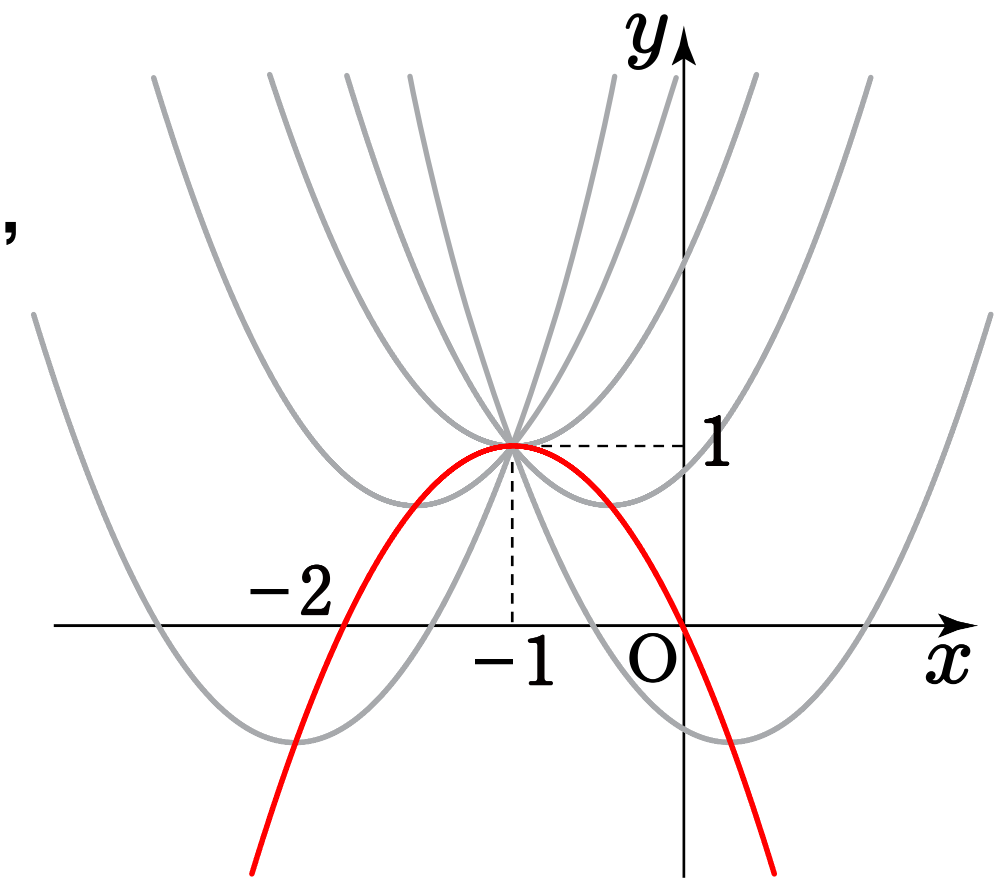
これより，頂点Pの座標は，

であるから，

Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=$ ，$y=$

これから，t を消去すれば



したがって，Pは，放物線 $y=-x^2-2x$ を描く.

動直線の交点の軌跡

t を $t \neq 0$ の定数とするとき，2直線

$$x + y = t, \qquad tx - ty = 1 \quad \cdots ①$$

の交点Pの座標 $(x,\ y)$ は連立方程式 ① を解いて，

$$x = \qquad\qquad ,\ y =$$

よって

$$x^2 - y^2 = \qquad\qquad \cdots ②$$

したがって，点Pは，定数 t の値に依らずつねに ② の表す曲線の上に存在する．