数学C

第１章　「行列とその応用」

7. 逆行列

hmc-1-7

(pdf ファイル)

行列 学習マップ

行列の演算

- 行列の基本概念
- 加法（和・差）
  - 零行列
- 実数倍
- 乗法
  - 累乗
  - 零因子
- Cayley - Hamiltonの定理
- 逆行列
- 対角化

逆行列

A を正方行列とし，E を単位行列とする．与えられた A に対して，

$$AX = XA = E$$

を満たす行列 X が存在するとすれば，それは 1 つしかない．

そこで，そのような X が存在するとき，X を A の**逆行列**といい，A^{-1} で表す．

注 A^{-1} は，数の場合でいえば，逆数に対応するものであるが，積についての交換法則が成り立たないので，$\dfrac{1}{A}$ とは書けない．

逆行列の計算

2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を $X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ とすると，$AX = E$ となることから，

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by=1 \cdots ① \\ cx+dy=0 \cdots ② \end{cases} \text{ かつ } \begin{cases} au+bv=0 \cdots ③ \\ cu+dv=1 \cdots ④ \end{cases}$$

$① \times d - ② \times b$, $② \times a - ① \times c$, $③ \times d - ④ \times b$,
$④ \times a - ③ \times c$ を計算すると,

逆行列が求められる場合

$$\begin{cases}(ad-bc)x=d & \cdots ⑤\\ (ad-bc)y=-c\cdots ⑥\end{cases}\quad\begin{cases}(ad-bc)u=-b\cdots ⑦\\ (ad-bc)v=a & \cdots ⑧\end{cases}$$

$ad-bc\neq 0$ のとき，⑤,⑥,⑦,⑧ から，x,y,u,v が求められ，

$$X=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

このとき，

$$XA=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=$$

となり，$XA=E$ も満たす．

ゆえに，X は，A の逆行列 A^{-1} である．

逆行列が求められない場合

$ad-bc=0$ のとき,

$$\begin{cases}(ad-bc)x=d & \cdots ⑤\\ (ad-bc)y=-c & \cdots ⑥\end{cases} \quad \begin{cases}(ad-bc)u=-b & \cdots ⑦\\ (ad-bc)v=a & \cdots ⑧\end{cases}$$

を満たす x, y, u, v が存在するためには,

$$a=b=c=d=0$$

でなければならないが, そのときは $A=O$ となるので $AX=E$ となる X は存在しえない.

すなわち, このときには A の逆行列は存在しない.

逆行列が存在するための必要十分条件

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta = ad - bc$ とおく．

(i)　$\Delta \neq 0$ のとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(ii)　$\Delta = 0$ のとき，A の逆行列は存在しない．

Δ は A の **行列式** (determinant) と呼ばれる実数で，$|A|$ や $det(A)$ と表されることが一般的である．

逆行列の例

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ について,

A の行列式は, $4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2 \neq 0$ であるから,

$A^{-1} =$

B の行列式は, であるから,

B の逆行列は存在しない.

行列 $C = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a+2 & 2 \end{pmatrix}$ については, その行列式が

であるから, a のとき C の逆行列は存在し, a のとき C の逆行列は存在しない.

例題

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，

$AX = B$ を満たす行列 X を求めよ．

【解】行列 A は，その行列式が $1 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = -1 \neq 0$ であることより

$$A^{-1} =$$

$AX = B$ の両辺に　　から A^{-1} をかけて，

$$X =$$

例題

A, B が同じ型の正方行列で，逆行列 A^{-1}, B^{-1} があるとき，次の式が成り立つことを証明せよ.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

【解】

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) =$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) =$

したがって，$(AB)^{-1} =$

【研究】逆行列の性質

正方行列 A に対し，$AX = E$ を満たす正方行列 X が存在するとき，$XA = E$ も成り立つ.

この性質を仮定して良いとすれば，一方の等式，たとえば,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$$

を示すだけで

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

も示されていることになる.

また，A^{-1} の逆行列は A であるから，次の式が成り立つ.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$