数学B

第４章　「微分方程式」

9. 定数変化法への還元

hmb-4-9

(pdf ファイル)

EDUPA

微分方程式の理論　学習マップ

- 線型微分方程式の基本性質
  《重ね合わせの原理》
- 線型２階微分方程式の解法
  《固有方程式》
- 線型２階微分方程式と連立線型微分方程式
  相互変換
- 連立線型微分方程式と行列
  《ベクトル場》

線型１階微分方程式

　$p(x), f(x)$ を与えられた関数として，未知関数 y とその導関数についての１次式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

で表されるものを **線型１階微分方程式** という．

　特に $f(x) = 0$ の場合，つまり

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

の形で表されるものを，**同次** という．←このとき変数分離!

　非同次の方程式の解は，同次の方程式の解を利用して求められる．

変数分離形への帰着(その1) — 定数変化法

　非同次の 1 階線型微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x - y \cdots\cdots (*)$$

は変数分離形ではない。

　この非同次項の x を無視して同次の形にした

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

の一般解は

$$y = Ce^{-x}$$

となる。そこで，ここに登場する任意定数 C を，x の関数 $C(x)$ に置き換えて，関数

$$y = C(x)e^{-x}$$

を考える.

定数変化法の実際

$y = C(x)e^x$ を最初に与えられた微分方程式

$\dfrac{dy}{dx} = x - y \cdots (*)$ に代入すると，

が導かれる。これから，

$C(x) =$ $(C$：任意定数$)$

よって微分方程式 $(*)$ の解として

$y =$ $(C$：任意定数$)$

が得られる.

このような同次形の解を基にして非同次形を解く解法を **定数変化法** という.

変数分離形への帰着（その2）

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y + 1 \qquad \leftarrow \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \text{型}$$

において，この右辺を，

$$u = 2x + y + 1$$

とおくと

$$\frac{du}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 2 + u \qquad \leftarrow \text{変数分離形！}$$

これを解いて u が求められ，それを利用して y が求められる．

変数分離形への帰着(その3)

一般に，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

← 同次形 (線型とは限らない！)

においては

$$u = \frac{y}{x} \qquad \therefore \quad y = xu$$

とおくと

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

すなわち，

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

← 変数分離形！

同次形微分方程式の例

$$x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$$

において，$y = xu$ とおくと

$$x\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = xu(\log u + 1)$$

$$\therefore \quad x^2\frac{du}{dx} = xu\log u$$ ← 変数分離形！

$$\int \frac{1}{u\log u}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log|\log u| = \log|x| + C$$

$$\log u = C_1 x$$

$$\therefore \quad u = e^{C_1 x} \qquad \therefore \quad y = xe^{C_1 x}$$