

第4章 「微分方程式」

9. 定数変化法への還元

hmb-4-9

(pdf ファイル)

微分方程式の理論 学習マップ

- 線型微分方程式の基本性質
《重ね合わせの原理》
- 線型 2 階微分方程式の解法
《固有方程式》
- 線型 2 階微分方程式と連立線型微分方程式
相互変換
- 連立線型微分方程式と行列
《ベクトル場》

線型 1 階微分方程式

$p(x)$, $f(x)$ を与えられた関数として, 未知関数 y とその導関数についての 1 次式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

で表されるものを **線型 1 階微分方程式** という.

特に $f(x) = 0$ の場合, つまり

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

の形で表されるものを, **同次** という. **←このとき変数分離!**

非同次の方程式の解は, 同次の方程式の解を利用して求められる.

変数分離形への帰着(その1) — 定数変化法

非同次の1階線型微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x - y \cdots \cdots (*)$$

は変数分離形ではない。

この非同次項の x を無視して同次の形にした

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

の一般解は

$$y = Ce^{-x}$$

となる。そこで、ここに登場する任意定数 C を、 x の関数 $C(x)$ に置き換えて、関数

$$y = C(x)e^{-x}$$

を考える。

定数変化法の実際

$y = C(x)e^x$ を最初に与えられた微分方程式
 $\frac{dy}{dx} = x - y \cdots (*)$ に代入すると,

が導かれる。これから,

$$C(x) = \quad (C : \text{任意定数})$$

よって微分方程式 (*) の解として

$$y = \quad (C : \text{任意定数})$$

が得られる。

このような同次形の解を基にして非同次形を解く解法を **定数変化法** という。

変数分離形への帰着(その2)

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y + 1 \quad \leftarrow \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \text{ 型}$$

において, この右辺を,

$$u = 2x + y + 1$$

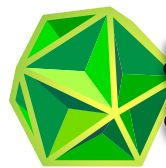
とおくと

$$\frac{du}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2 + u$$

← 変数分離形!

これを解いて u が求められ, それを利用して y が求められる.



変数分離形への帰着(その3)

一般に, 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \leftarrow \text{同次形 (線型とは限らない!)}$$

においては

$$u = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad y = xu$$

とおくと

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad u + x \frac{du}{dx} = f(u)$$

すなわち,

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u \quad \leftarrow \text{変数分離形!}$$

同次形微分方程式の例

$$x \frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$$

において, $y = xu$ とおくと

$$x \left(u + x \frac{du}{dx} \right) = xu(\log u + 1)$$

$$\therefore x^2 \frac{du}{dx} = xu \log u$$

← 変数分離形!

$$\int \frac{1}{u \log u} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log |\log u| = \log |x| + C$$

$$\log u = C_1 x$$

$$\therefore u = e^{C_1 x} \quad \therefore y = x e^{C_1 x}$$