数学B

第４章　「微分方程式」

2. 運動と微分方程式

hmb-4-2

(pdf ファイル)

微分方程式の基本　学習マップ

- 微分方程式とは
- 運動と微分方程式
- 初期条件，一般解と特殊解
- 微分方程式の解法の基礎(変数分離形)
- もっとも基本的な自然現象のモデル(爆発型)
- 抑制機構のある現象のモデル (環境悪化，抵抗)
- 振動現象のモデル
- 数理的な自然観

ニュートンの運動方程式

ニュートンの偉大な発見の一つは「力 $\vec{f}$ が加速度 $\vec{\alpha}$ に比例する」と表現される力学の基本法則である.

その比例定数は **質量** と呼ばれ，これを m で表すと，上の法則は，

$$\vec{f} = m\vec{\alpha} \quad \langle\text{運動方程式}\rangle$$

と表される.

質点の位置を $\vec{r}$ で表すと，加速度 $\vec{\alpha}$ は時間 t による $\vec{r}$ の 2 階微分 $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ であるから，上の運動方程式は

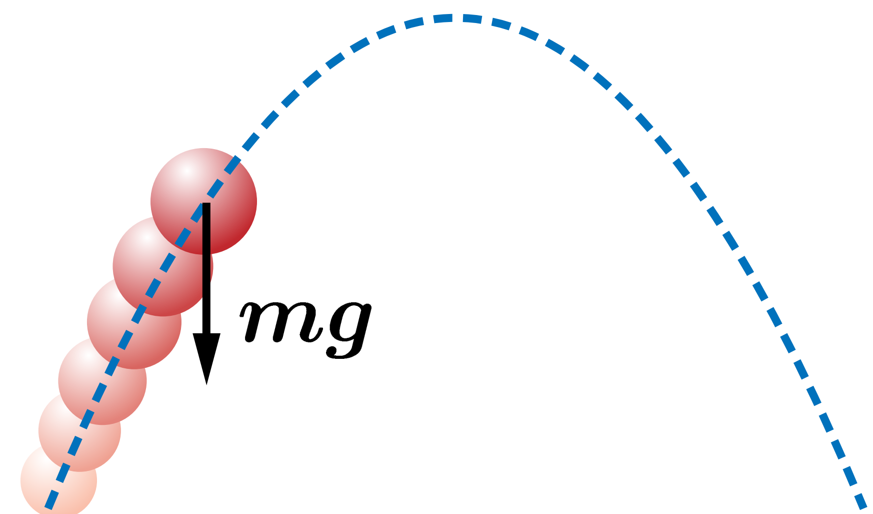
$$\vec{f} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

という 2 階の微分方程式になる.

投射体の運動

　地上の運動では，空気抵抗などを無視すれば，働く力として重力(地球との引力) だけを考えれば良い．

　投射体の軌道面で，水平，垂直方向にそれぞれ x 軸，y 軸をとってベクトルを成分表示すると，



$$\begin{cases} \vec{f} = (0, -mg) \\ \vec{r} = (x,\ y) \end{cases}$$

であり，したがって運動方程式は

$$(0,\ -mg) = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

である．

　ここで，g は **重力加速度** と呼ばれる定数である．

投射体の運動の微分方程式

投射体については，運動方程式

$$\vec{f} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

は，前に示した xy 座標系では，

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ -g = \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

という，時刻 t の関数 x，y についての 2 組の微分方程式

に分けられる．

微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$ の解

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, すなわち, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=0$ を解くと,

$$\frac{dx}{dt}= \qquad\qquad (C_1 \text{ は定数})$$

したがって

$$x= \qquad\qquad (C_2 \text{ は定数})$$

となる. ↑ x が時刻 t の関数として定められた！

C_1, C_2 は微分方程式に関しては,「まったく任意」である.

微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g$ の解

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$, すなわち, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)=-g$ を解くと,

$$\frac{dy}{dt}= \qquad\qquad\qquad\qquad (C_3\,\text{は定数})$$

したがって

$$y= \qquad\qquad\qquad\qquad (C_4\,\text{は定数})$$

となる.　　　⬆ y が時刻 t の関数として定められた！

C_3, C_4 は微分方程式に関しては,「まったく任意」である.