数学B

第３章　「複素平面」

15. 複素関数（２）
ー分数関数の基本（２）

hmb-3-15

(pdf ファイル)

例題

点 z が条件 $|z-1|=|z-i|$ かつ $z \neq 0$ に従って動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ とおくと，点 w の描く図形はどのようになるか．図示せよ．

【解答】$w=\dfrac{1}{z}$ より $z=\dfrac{1}{w}$ $\cdots$①

① を与えられた等式に代入して z を消去すると

$$\left|\frac{1}{w}-1\right|=\left|\frac{1}{w}-i\right|$$

$w \neq 0$ の下で，これは次のように変形できる．

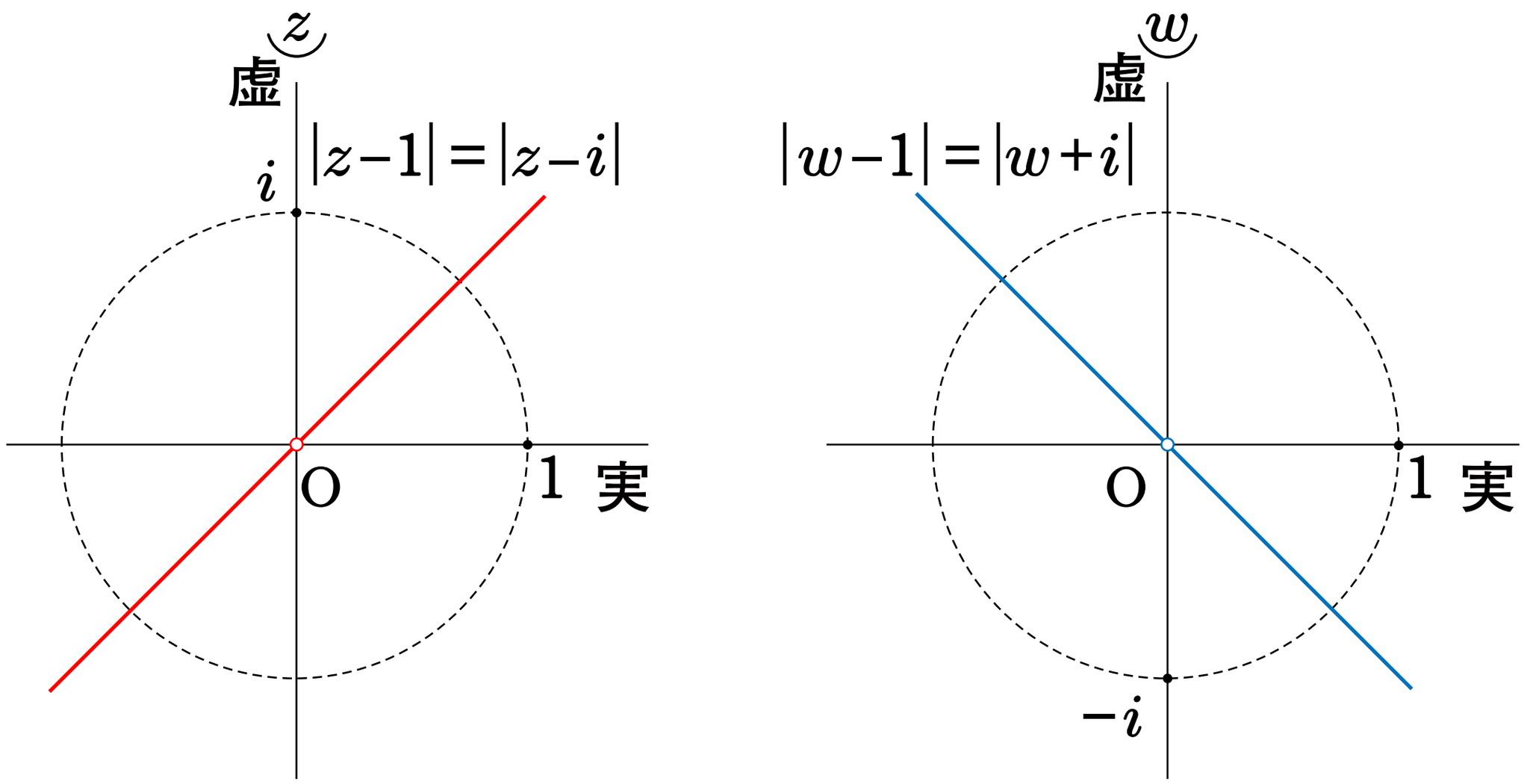
$$|1-w|=|1-iw|$$

$$\therefore \quad |w-1|=\left|-i\left(w-\frac{1}{i}\right)\right|$$

$$\therefore \quad |w-1|=|w+i|$$

$|w-1|=|w+i|$

点 w から 2 点 A(1)，B($-i$) に至る距離が等しい．よって，点 w は線分 AB の垂直二等分線 (ただし，原点 O は除く) を描く．



例題

点 z が条件 $|z-1|=1$ かつ $z \neq 0$ に従って動くとき，$\dfrac{1}{z}=w$ とおくと，点 w の描く図形はどのようになるか．図示せよ．

【解答】 $\dfrac{1}{z}=w$ より $z=\dfrac{1}{w}$

これを z の条件 $|z-1|=1$ に代入すると

$$\left|\frac{1}{w}-1\right|=1$$

$w \neq 0$ の下でこれを同値変形すると次のようになる：

$$|1-w|=|w|$$

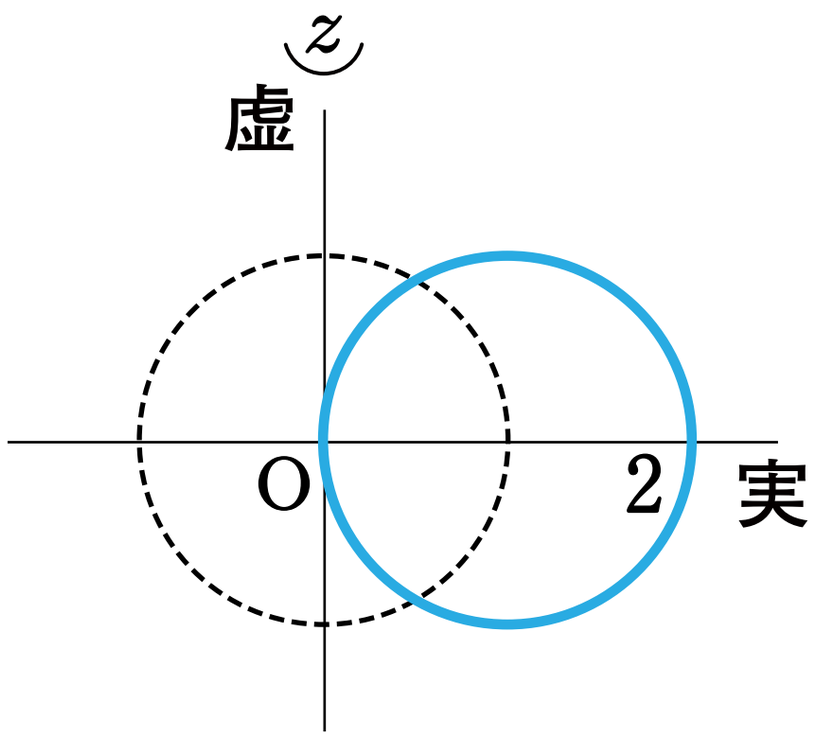
$w+\overline{w}=1$

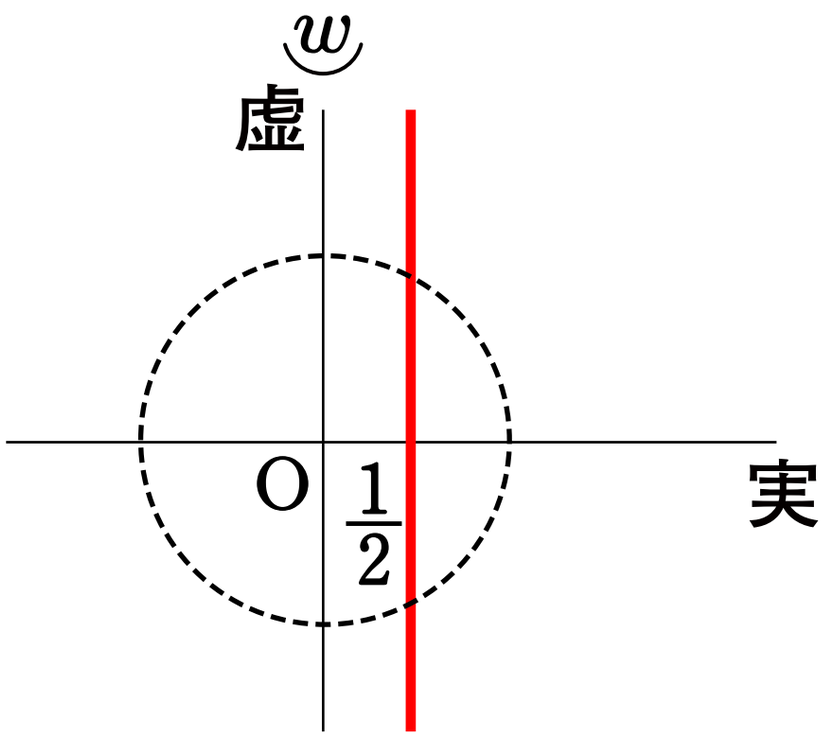
これは,

$$w\text{ の実部}=\frac{1}{2}$$

を意味する.

よって，点 w は点 $\dfrac{1}{2}$ を通り虚軸に平行な直線を描く.





例題

点 z が条件 $|z-2i|=1$ に従って動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ とおくと，点 w の描く図形はどのようになるか．図示せよ．

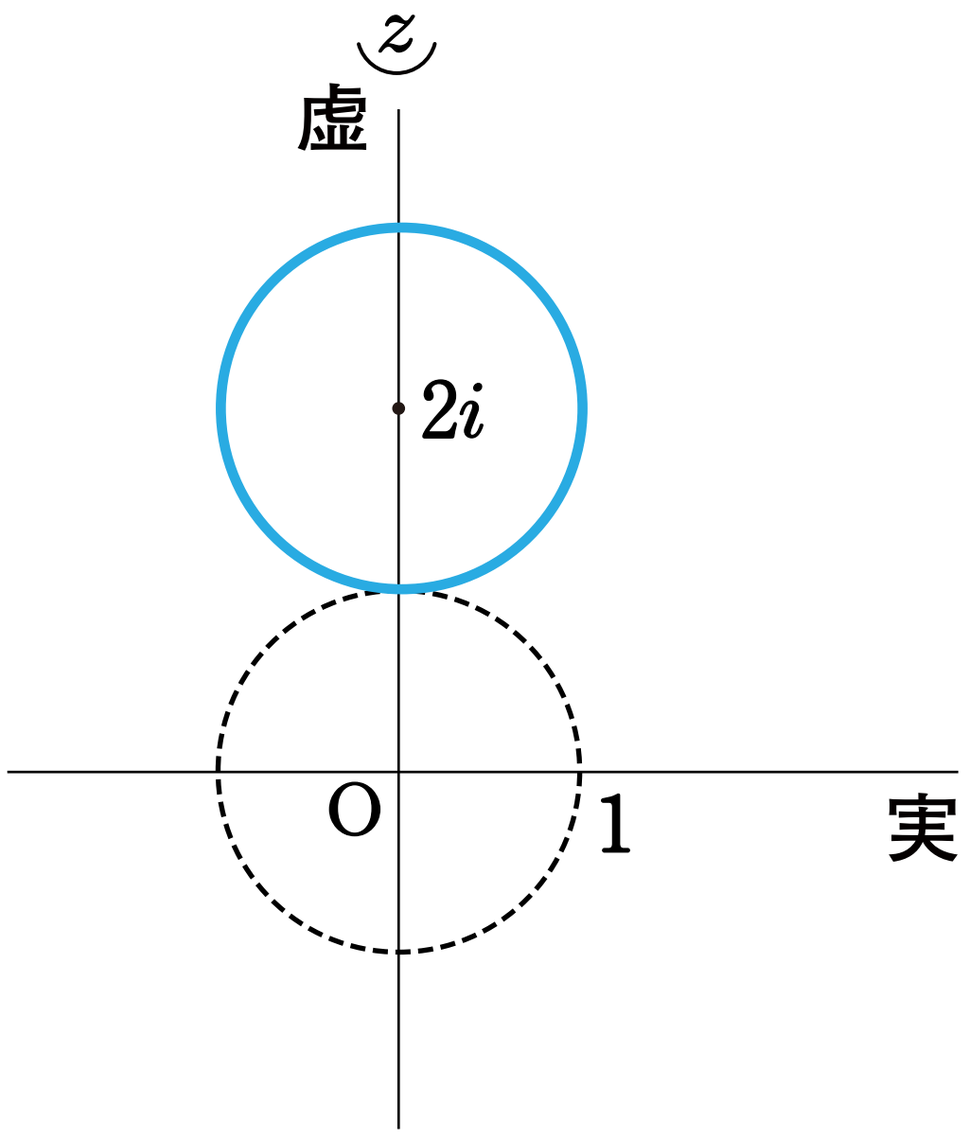
【解答】$z=\dfrac{1}{w}$ を $|z-2i|=1$ に代入すると，

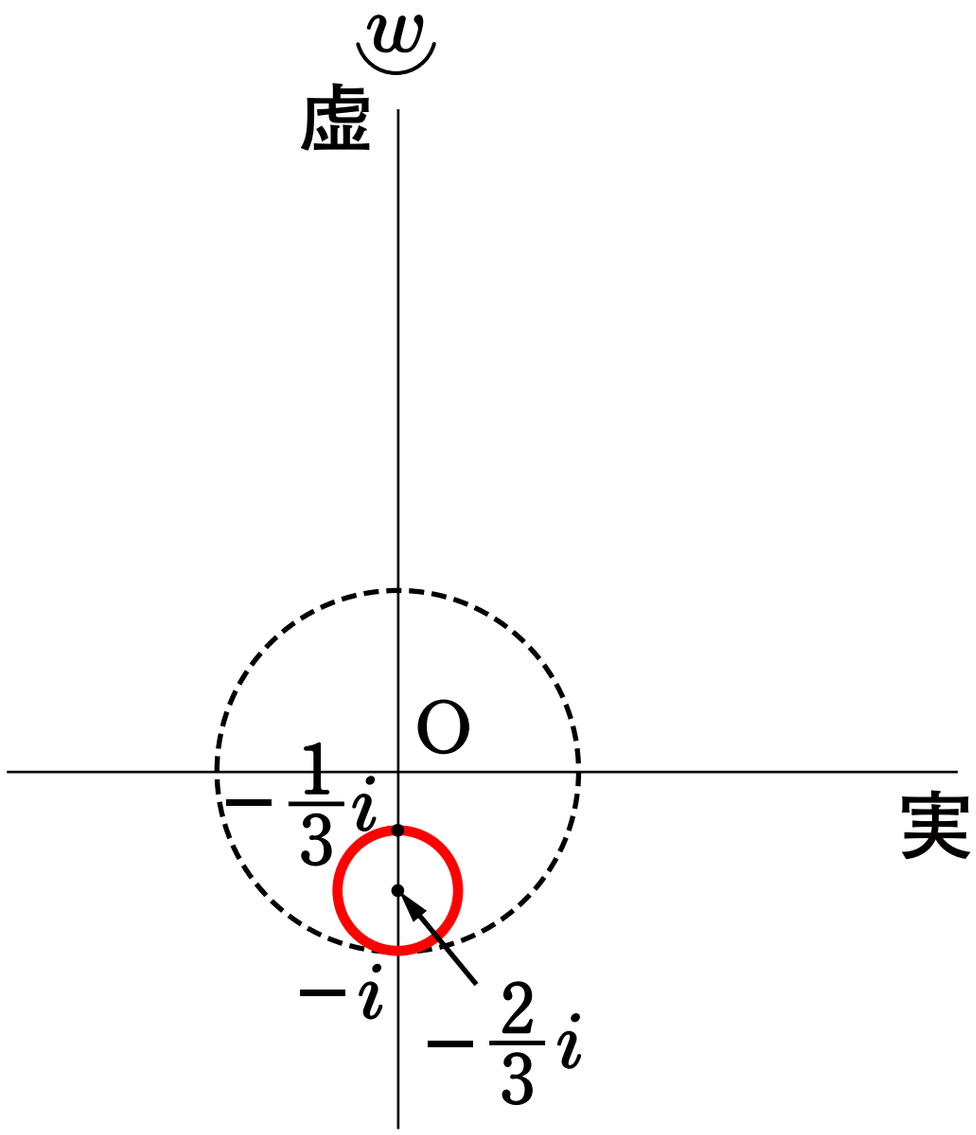
$$\left|\frac{1}{w}-2i\right|=1 \qquad \therefore \quad \left|\frac{1-2iw}{w}\right|=1$$

$w \neq 0$ の下で，これは次のように変形できる．

$|1-2iw|=|w|$の同値変形

よって，点 w は点　　を中心とする半径　　の円を描くことを示している．


z
虚
$2i$
O
1
実


w
虚
O
$-\frac{1}{3}i$
実
$-i$
$-\frac{2}{3}i$