数学B

第２章　「ベクトル」

5. 基本ベクトルと成分表示

hmb-2-5

(pdf ファイル)

EDUPA

ベクトル　学習マップ

平面ベクトルの基礎理論

- ベクトルの概念
- ベクトルの演算　——加法と実数倍——
- ベクトルの分解　(一次結合)
- 基本ベクトルと成分表示
- 有向線分の表すベクトルの成分表示
- ベクトルの内積の概念
- ベクトルの内積の基本的応用

平面ベクトルの応用

- 位置ベクトルの概念
- 図形のベクトル方程式
- 図形の論証問題

⋮

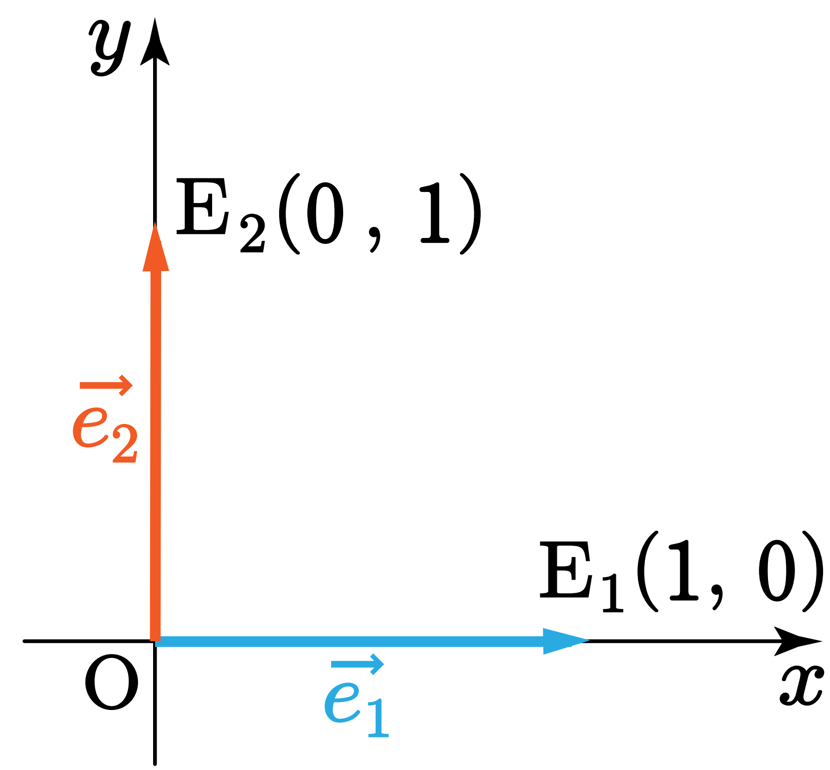
平面の基本ベクトル

Oを原点とする座標平面上で，x 軸および y 軸上に2点 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{E}_2(0,\ 1)$ をとる．

このとき，座標軸方向の2つの単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OE}_1}$$
$$\vec{e}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OE}_2}$$

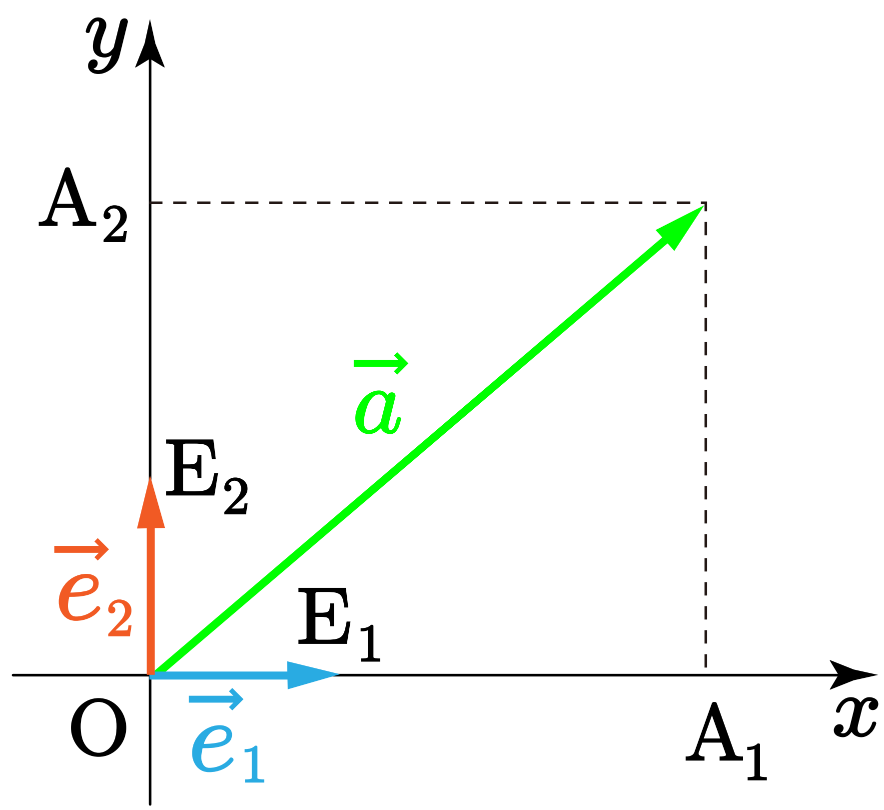
を平面の **基本ベクトル** という．



基本ベクトル方向への分解

　任意のベクトル $\vec{a}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ となる点Aをとる．

　A を通り y 軸，x 軸に平行な直線をひき，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ とする．このとき，



$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = a_1\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = a_2\vec{e}_2$$

となる実数 a_1，a_2 がある．

　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ であるから，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は次の形にただ1通りに表される．

$$\boxed{\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2}$$

ベクトルの成分，成分表示

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ となるとき，a_1，a_2 を $\vec{a}$ の **成分**，a_1 を **x 成分**，a_2 を **y 成分** といい，

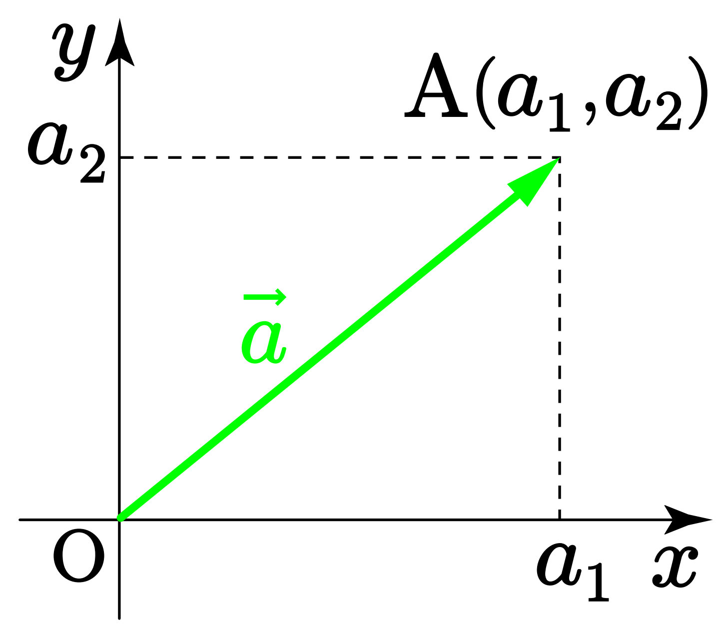
$$\vec{a}=(a_1, a_2)$$

と書く．この右辺を，$\vec{a}$ の **成分表示** という．

ベクトル $\vec{a}$ の成分表示 $(a_1,\ a_2)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ となる点 A の座標と見掛け上，一致する．とくに，

$$\vec{e_1}=(1,\ 0)$$
$$\vec{e_2}=(0,\ 1)$$
$$\vec{0}=(0,\ 0)$$

である．



成分表示されたベクトルの基本性質

成分表示されたベクトルについて次の関係が成り立つ.

ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ のとき,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

例 $\vec{a} = (2,\ 5)$ のとき, $|\vec{a}| =$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ に対して,

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1 \text{ かつ } a_2 = b_2$$

ベクトルの演算と成分表示

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ は，基本ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を用いて，

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}, \qquad \vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) + (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) \\ &= \end{aligned}$$

$$(a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$$

同様に

$$(a_1,\ a_2) - (b_1,\ b_2) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$$

$k(a_1,\ a_2) = (ka_1,\ ka_2)$　ただし，k は実数

成分表示されたベクトルの演算例

例 $\vec{a} = (1,\ 3)$, $\vec{b} = (2,\ 1)$ のとき,

$$2\vec{a} - 3\vec{b} =$$

例題

$\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=(1,\ 5)$ に対して，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ を満たすように，m, n の値を定めよ.

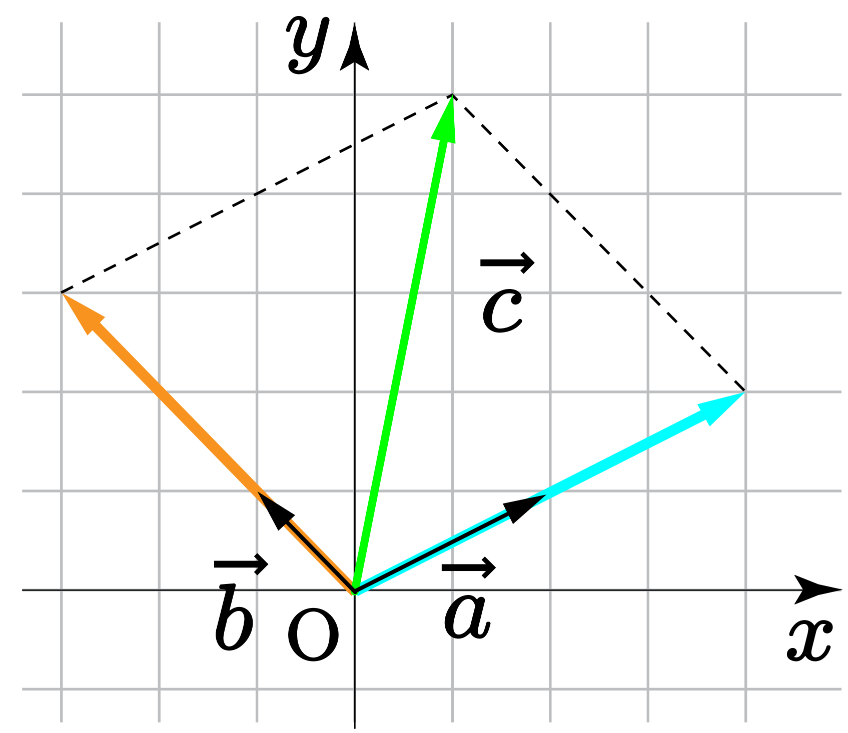
【解】 $m\vec{a}+n\vec{b}$ を成分で表すと，

$m(2,\ 1)+n(-1,\ 1)$

$=$

したがって，$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{c}$ となるのは，

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$



$\therefore\ m=\quad ,\ n=$

注意 どんなベクトル $\vec{c}$ に対しても，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ を満たすように m, n を決めることができる.