数学B

第２章　「ベクトル」

32. コーシーの不等式

hmb-2-32

(pdf ファイル)

【発展】Cauchyの不等式(1)

与えられたベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対し，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ とすれば，$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ であって，

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$$

この各辺に $|\vec{u}||\vec{v}|$ を乗ずると，

$$-|\vec{u}||\vec{v}| \leqq \vec{u}\cdot\vec{v} \leqq |\vec{u}||\vec{v}|$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$$

ここで等号が成り立つのは，

$$|\vec{u}||\vec{v}| = 0 \quad \text{または} \quad \cos\theta = \pm 1$$

のときである．

【発展】Cauchyの不等式(2)

　与えられたベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対し，関数

$$\begin{aligned} f(t) &= |t\vec{u} - \vec{v}|^2 \\ &= |\vec{u}|^2 t^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})t + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

を考える．$\vec{u} \neq \vec{0}$ のとき，$f(t)$ は "任意の実数 t に対し，$f(t) \geqq 0$" を満たす2次関数であるから，

$$(\text{判別式}) \leqq 0 \qquad \therefore \ (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \leqq 0$$

すなわち，

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}$$

　ここで等号は，$f(t) = 0$ すなわち，$t\vec{u} = \vec{v}$ となる実数 t が存在するときに成り立つ．

【発展】Cauchyの不等式(3)

Cauchy の不等式

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$$

において

◪ $\vec{u}=(a,\ b),\quad \vec{v}=(x,\ y)$ とすると,

$$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

◪ $\vec{u}=(a,\ b,\ c),\quad \vec{v}=(x,\ y,\ z)$ とすると,

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$