数学B

第２章　「ベクトル」

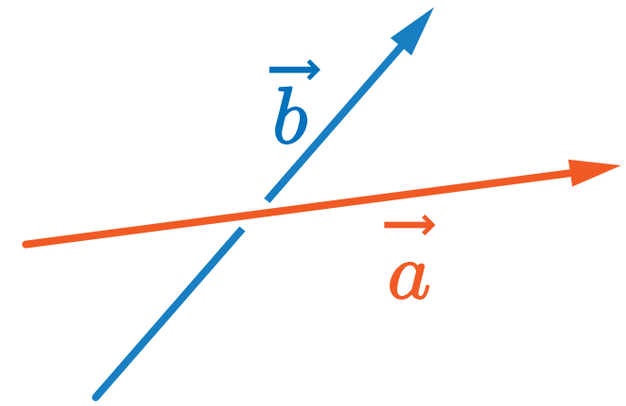
23. 空間ベクトルの内積

hmb-2-23

(pdf ファイル)

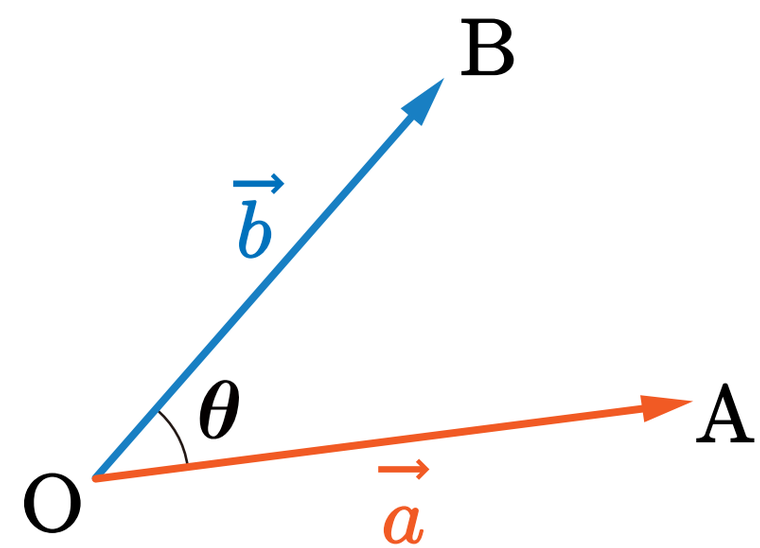
空間ベクトルの内積

空間において，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角と θ とするとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内積** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を，平面の場合と同様に次の式で定義する．



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$



$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　と定める．

成分表示された空間ベクトルの内積

平面ベクトルのときと同様，余弦定理を用いると，空間ベクトルの内積を成分で表すことができる．

内積と成分表示

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とするとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\begin{aligned}\because)\ \vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}\left\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\&\quad-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2\}\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

空間ベクトルの内積の性質

空間ベクトルの内積について，平面ベクトルの場合と同様の性質が成り立つ．

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交換法則）

2 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

3 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ （分配法則）

4 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$
ただし，k は実数

空間ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると，次の関係が成り立つ.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

ベクトルのなす角の計算例

ベクトル

$$\vec{a} = (1,\ 3,\ -2),\quad \vec{b} = (3,\ 2,\ 1)$$

のなす角を θ とすると,

$$\cos\theta =$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから,

$$\theta =$$