数学B

第１章　「数列」

11. 平方の数列の和

---

hmb-1-11

(pdf ファイル)

学習マップ

数列の基本概念

数列についての基本操作

最も基本的な数列

- 等差数列
- 等比数列

数列についての基本操作

- 第 n 項までの和, $\sum$ 記号
- 階差数列

応用的数列

- いろいろな数列
- 群数列の考え

回帰的定義

- 漸化式
- 数学的帰納法

平方数列の和

平方数 (自然数の平方) の列の和

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

を考える.

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 9, \quad \cdots$$

となる.

数列 $\{S_n\}$ の一般項 S_n (平方数列の和の公式) はどうなるであろうか？

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

$k=1$ のとき, $2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$

$k=2$ のとき, $3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

$k=3$ のとき, $4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$k=n$ のとき, $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これら n 個の等式の辺々を加えると,

左辺 $=$

右辺 $=3\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$

$\qquad +3\cdot(1+2+3+\cdots+n)+n$

$\qquad =3S_n+3\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n$

平方数列の和の一般公式

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$3S_n =$$

すなわち,

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

平方数列の和（微かな改良）

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$$

において，$k=1,2,3,\cdots,n$ としたものを加え合わせると，

$$\begin{cases}\text{左辺}=\\ \text{右辺}=\end{cases}$$

$$\therefore \quad S_n=$$

平方数列の和(より大きな改良)

$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k^2+3k$ において，$k=1,2,3,\cdots,n$ としたものを加え合わせると，

$$\begin{cases} \text{左辺}= \\ \text{右辺}= \end{cases}$$

$$\therefore \quad S_n=$$