数学A

第４章　「平面図形」

１．三角形の重心

---

hma-4-1

(pdf ファイル)

定理と証明

定理 (theorem)：数学の命題の中で，正しいと証明されたもののうち，特に重要なもの

（例）中点連結定理

証明 (demonstration, proof)：定義と公理に基づいて，命題が正しいことを論理的に示すこと

定義 (definition)：言葉の意味，用法を規定すること

（例）線分とは，異なる２点を通る直線の，２点の間の部分である.

公理 (axiom)：証明の出発点として前提にする命題

（例）異なる２点を通る直線はただ１つ存在する.

理論 (theory)：様々な事柄や現象に対して，統一的・普遍的な説明を与える体系的知識

（例）相対性理論

補助線 —— 証明のための道具

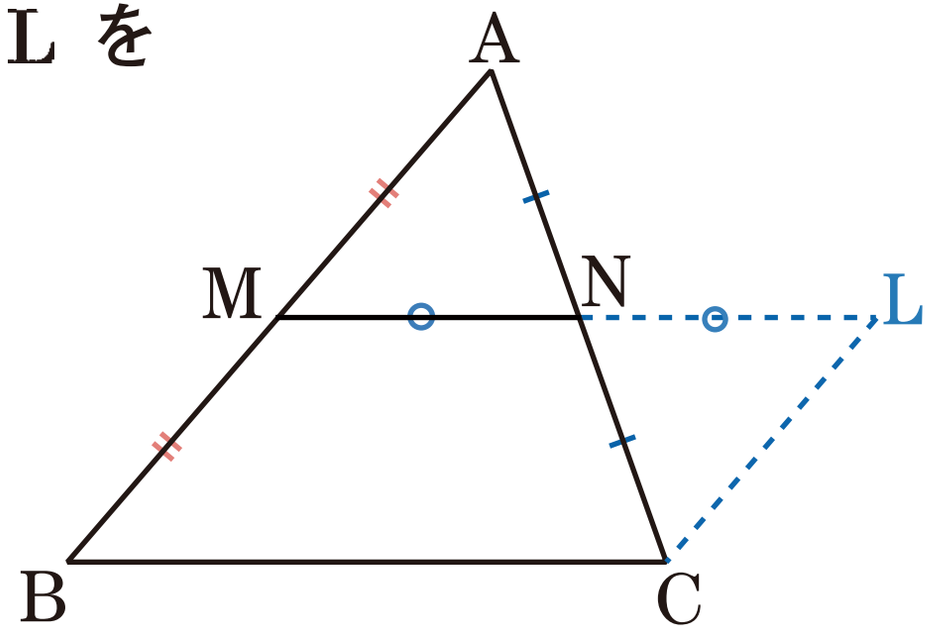
中点連結定理「$\triangle ABC$の辺AB, AC の中点をそれぞれ M, N とおくと，$MN /\!/ BC$, $MN = \dfrac{1}{2}BC$」 を証明するには，MN を延長してその上に点 L を

$$MN = NL$$

となるようにとり，

$$\begin{cases} ML /\!/ BC \\ ML = BC \end{cases}$$

を証明すればよい．



線分 NL, LC のように，証明のために追加的に作図する，初めに与えられていない線を **補助線** という．

中点連結定理の証明(概要)

(1)　$\triangle \mathrm{AMN} \equiv \triangle \mathrm{CLN}$

を示し，これを用いて，

(2)　$\begin{cases} \angle \mathrm{AMN} = \angle \mathrm{CLN} \\ \mathrm{AM} = \mathrm{CL} \end{cases}$

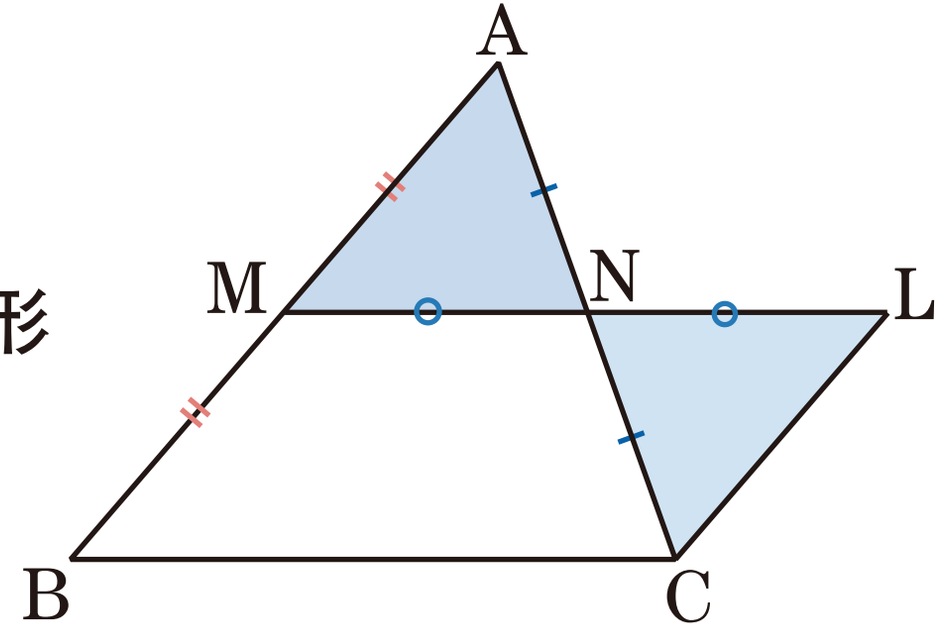
を示し，(2) から，

(3)　四角形 MBCL は平行四辺形

であることをいえば，それから

$$\begin{cases} \mathrm{ML} \parallel \mathrm{BC} \\ \mathrm{ML} = \mathrm{BC} \end{cases}$$

が導かれる．



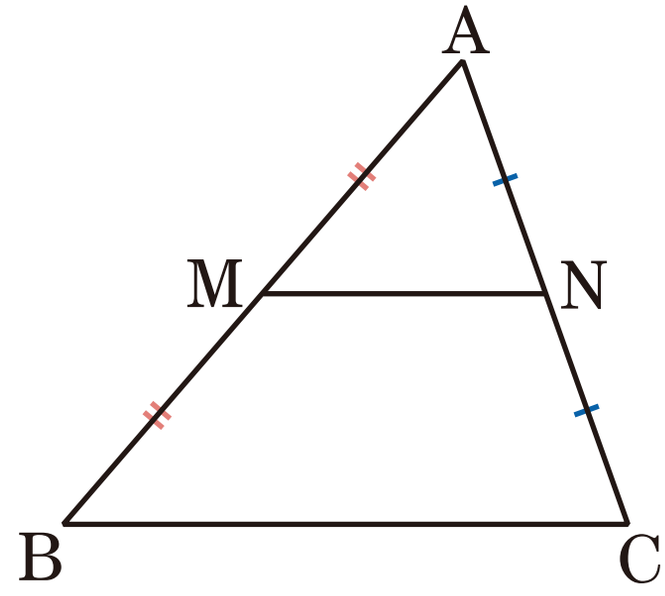
中点連結定理と相似

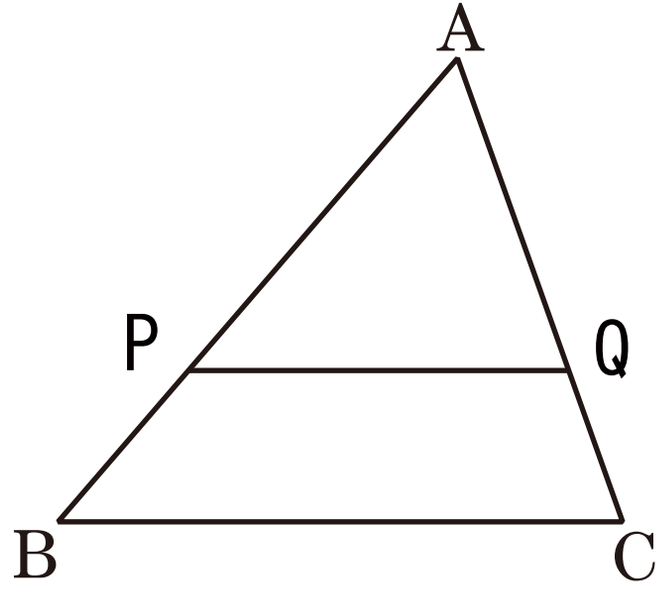
中点連結定理は，その仮定を

$\mathrm{AM} : \mathrm{AB} = \mathrm{AN} : \mathrm{AC} = 1 : 2$

と書き換えると，$\triangle \mathrm{AMN}$ と$\triangle \mathrm{ABC}$ が相似比 $1 : 2$ の相似であることから導かれるように見える．

しかし，三角形の相似の性質 (それから導かれる「平行線と比例」の性質) は，中点連結定理をもとにして証明されるものである．それゆえ，相似を利用して中点連結定理を「証明」すると **循環論法** に陥ってしまう！

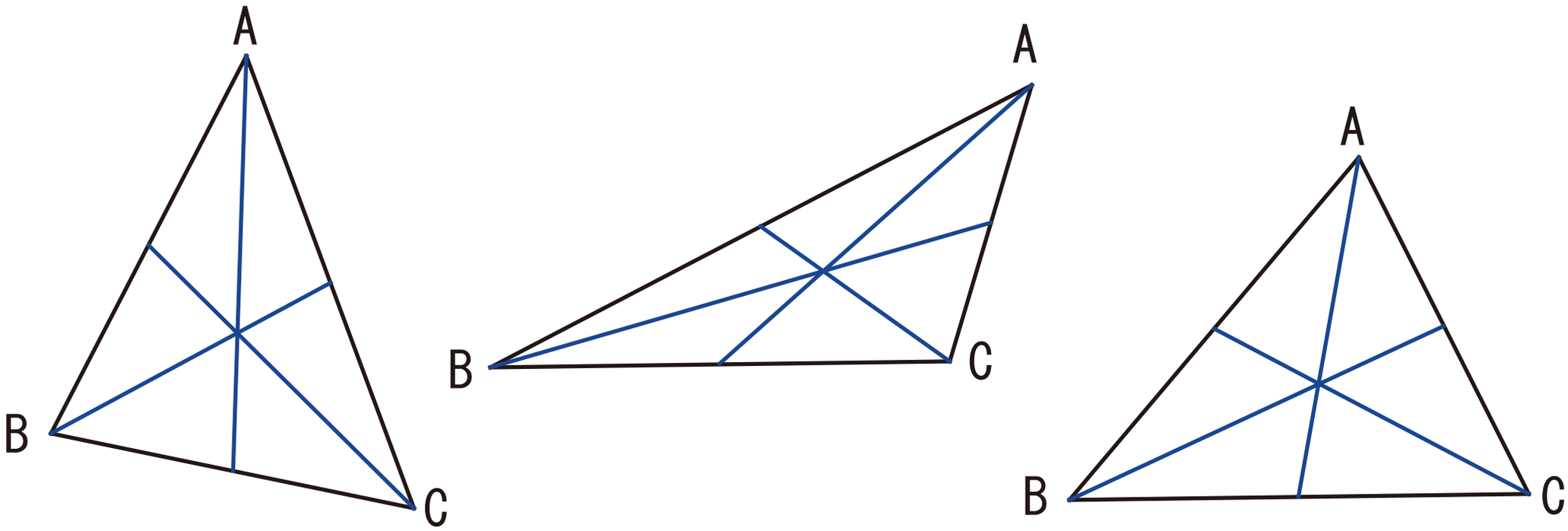




三角形の3中線は一点で交わる

三角形の中線についての定理

三角形の３本の中線は１点で交わり，その点によって２：１ の比に分けられる.



幾何学的にエレガントな性質

滅多に起こらない幾何学的現象

☆３点が同一直線上にある
☆３直線が一点で交わる
☆４点が同一円周上にある
☆４点が同一平面上にある
☆５点が同一球面上にある
・・・・・・・・・

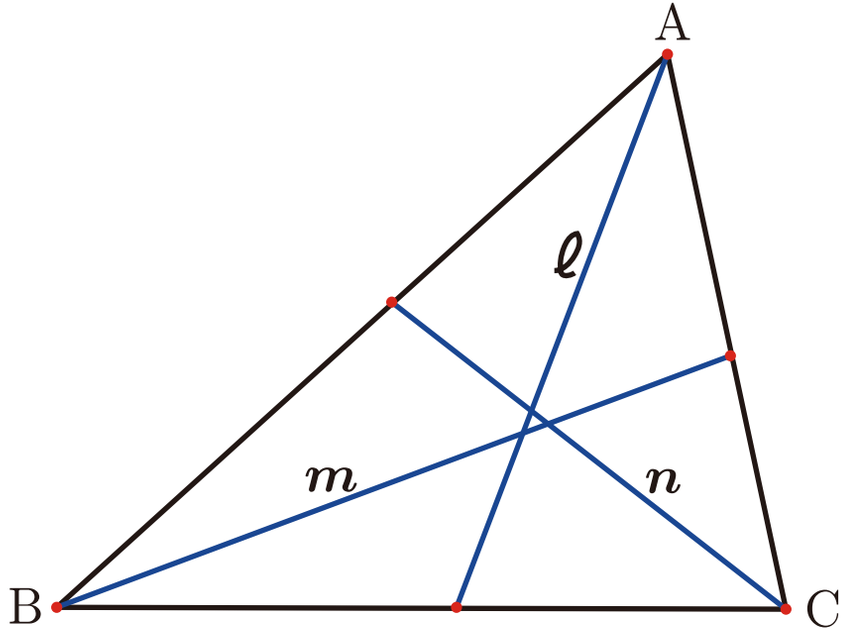
これらが，もし，必然的に起こるとしたら，それはとても不思議なことではないだろうか？

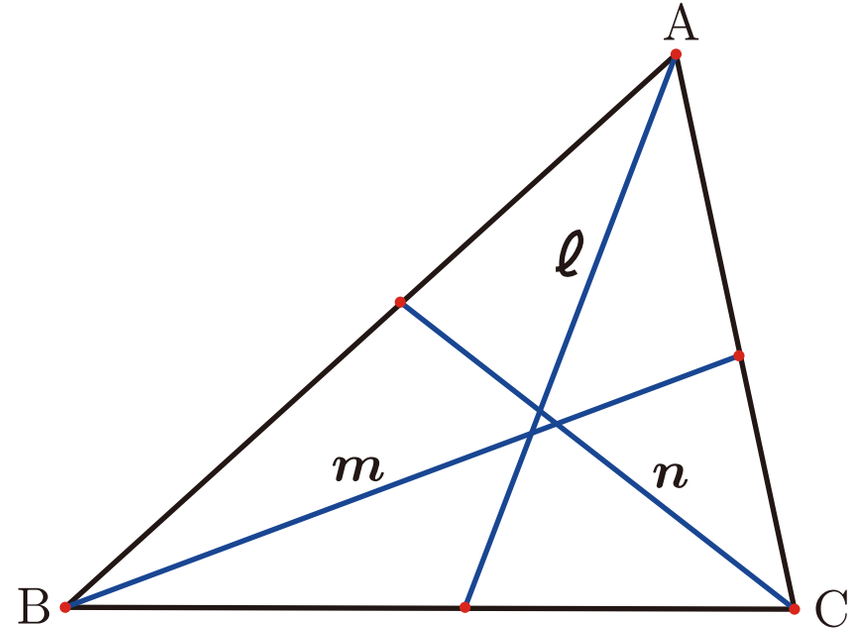
3本の直線が1点で交わるとは

平面上にある3本の直線 l, m, n は，三角形を作るのが一般的である．“1点で交わる”というのは，この三角形の面積が0になるという **特別の場合** である．

《3本の中線》に関しては，この特別の場合が起こる！

さて，3本の直線が1点で交わることを示すには，どんな方法があるだろうか？





「3中線についての定理」の証明

△ABC の3中線を，図のようにAD, BE, CF とし，BE とCF, BE とADの交点をそれぞれG, H とする．すると，中点連結定理により，

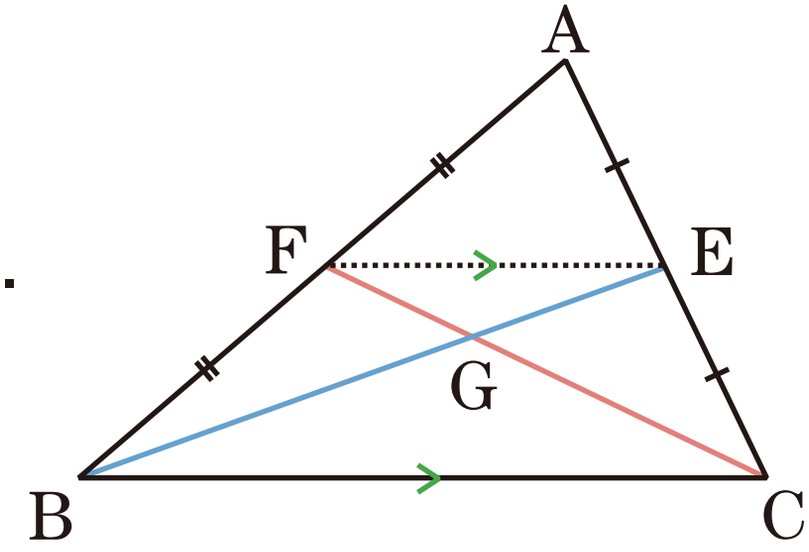
$$FE \parallel BC,\quad BC : FE = 2 : 1$$

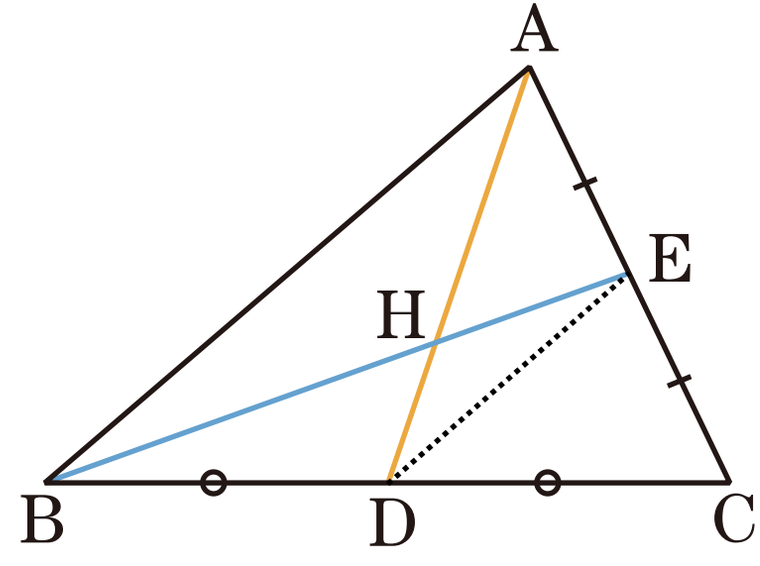
$$\therefore\ \triangle GBC \backsim \triangle GEF$$

$$\therefore\ BG : GE = 2 : 1$$

同様に，

よって，２点 G, H は一致する．すなわち，3本の中線 BE, CF, AD は同じ点で交わり，3中線はこの点で 2 : 1 に分けられる．　q.e.d.





重心とは

定義

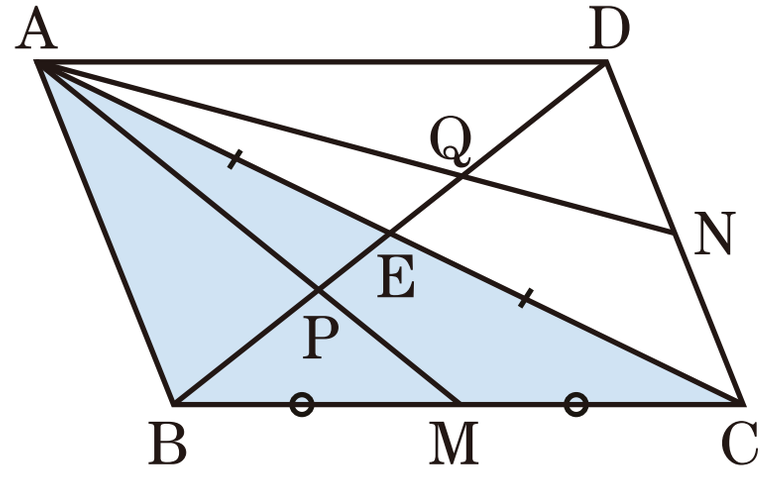
三角形の3中線の交点を，この三角形の **重心** という．

注　重心（ center of gravity ）という語は，この点が「3中線の交点」という数学的美しさだけでなく，物理的な意味を有していることを示唆する．

例題

平行四辺形 ABCD で辺 BC，CD の中点をそれぞれ M, N とし，AM, AN が対角線 BD と交わる点をそれぞれ P, Q とする．このとき，PQ : BD を求めよ．

【解】　対角線 AC，BD の交点を E とすると，E は AC の中点である．



AM，BE は△ABC の中線であるから，P は △ABC の重心である．

同様に，Q は △ADC の重心である．

よって，$\mathrm{PE}=\frac{1}{3}\mathrm{BE}$，$\mathrm{EQ}=\frac{1}{3}\mathrm{ED}$

$$\therefore\ \mathrm{PQ}=\mathrm{PE}+\mathrm{EQ}=\frac{1}{3}(\mathrm{BE}+\mathrm{ED})=\frac{1}{3}\mathrm{BD}$$

すなわち，$\mathrm{PQ}:\mathrm{BD}=1:3$