

第 6 章 「積分法の応用」

6. 回転体の体積 (基本)

hm3-6-6

(pdf ファイル)



積分法の応用 学習マップ

求積問題

■ 面積

- カヴァリエリの原理
- 積分変数のとり方
- 媒介変数表示と面積

■ 体積

- 体積計算の基本原則
- 回転体

基本型, 発展型

- 非回転体

■ 【発展】弧長, 道のり

定積分の理論

■ 定積分と数列和の評価

- 原理: 定積分と不等式
- 単調関数の積分の性質

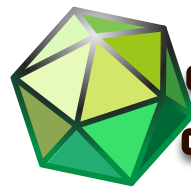
■ 区分求積法

- 区分求積法とは
- 区分求積法の応用

関数方程式

- 定積分が定める関数
(積分方程式)

- 【発展】微分方程式



立体の体積

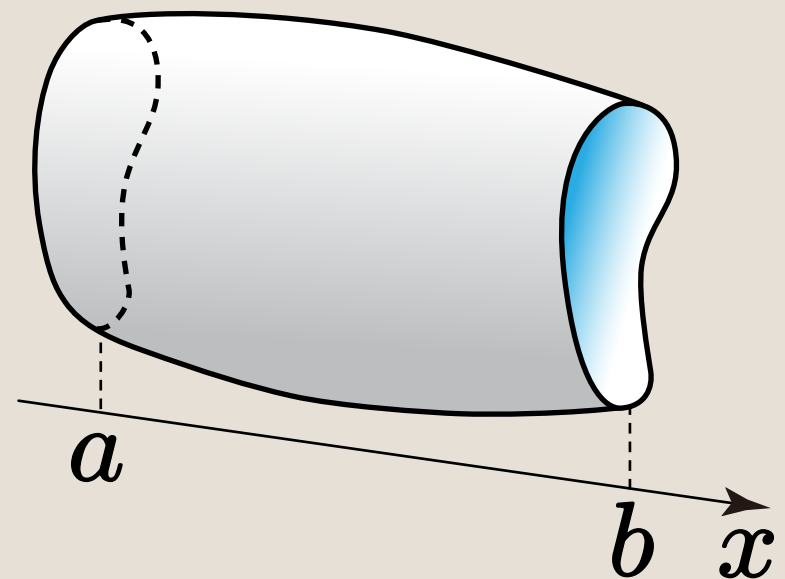
立体の体積と定積分

x 軸に垂直な平面による断面
積が $S(x)$ である立体の 2 平面
 $x = a$, $x = b$ の間にある部分
の体積 V は

$$V = \int_a^b S(x) \, dx$$

と表せる.

ただし, $a < b$ とする.



円錐の体積

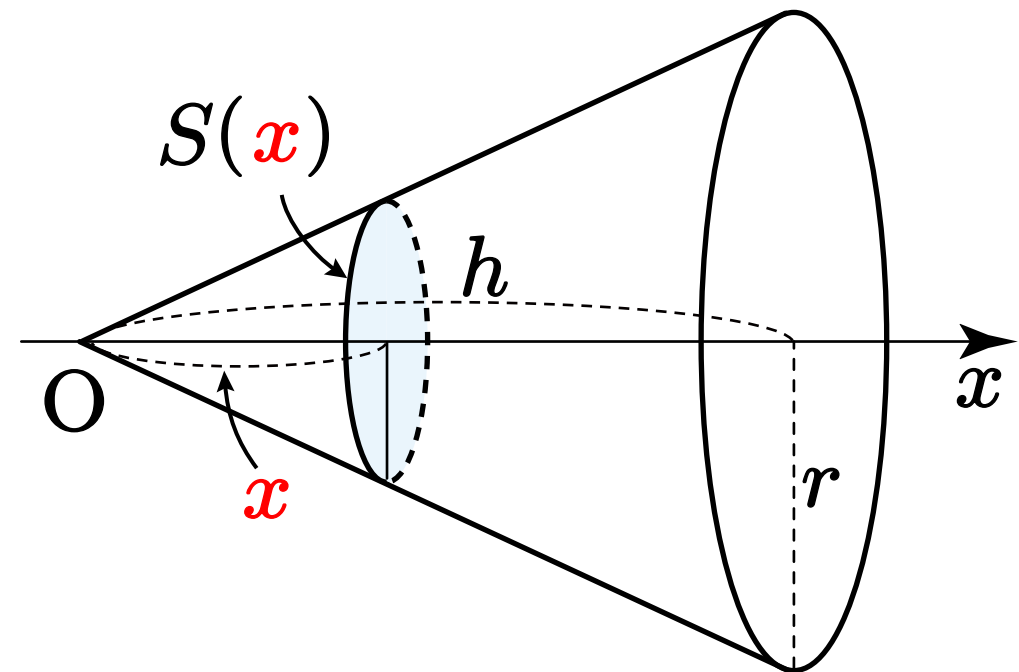
半径 r ，高さ h の円錐 の体積を V とし，円錐の頂点を原点とし，頂点から底面に下ろした垂線を x 軸とする．座標が x の点で x 軸に垂直に立てた平面によるこの立体の断面は，半径 $\quad$ の円であるから，断面積

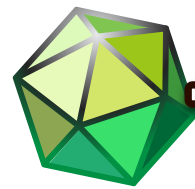
$S(x)$ は，

$$S(x) =$$

で与えられる．

$$\therefore V = \int_0^h S(x) dx =$$

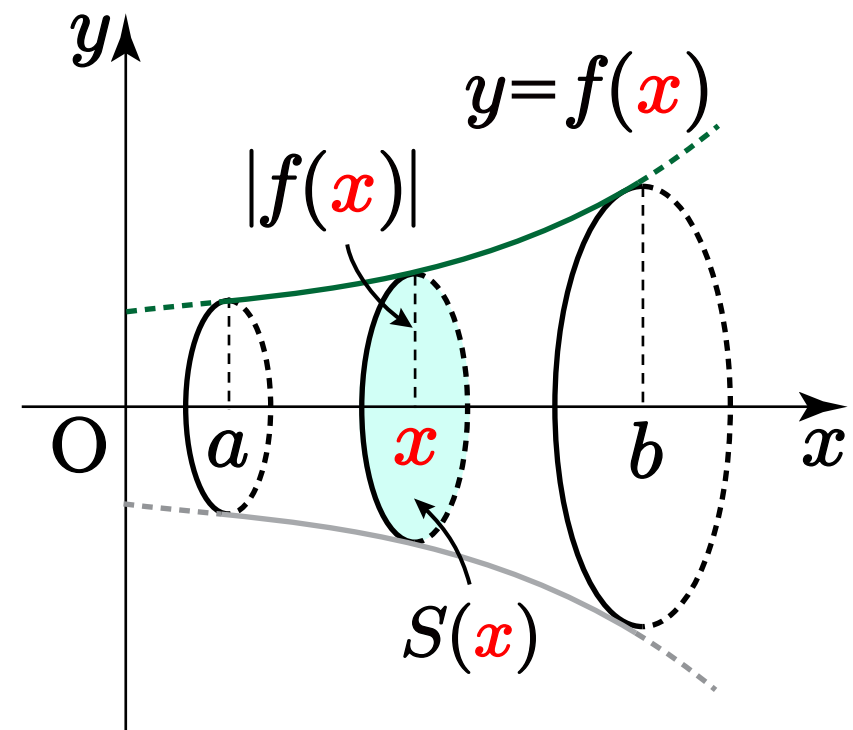




一般の回転体の体積

曲線 $y = f(x)$ と, x 軸および2直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体 K の体積を V とする.

x 座標が x である点で x 軸に垂直に立てた平面による K の断面は, 半径 $|f(x)|$ の円であるから, 断面積は $S(x) = \pi\{f(x)\}^2$ となる.



$$V = \int_a^b y^2 dx = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

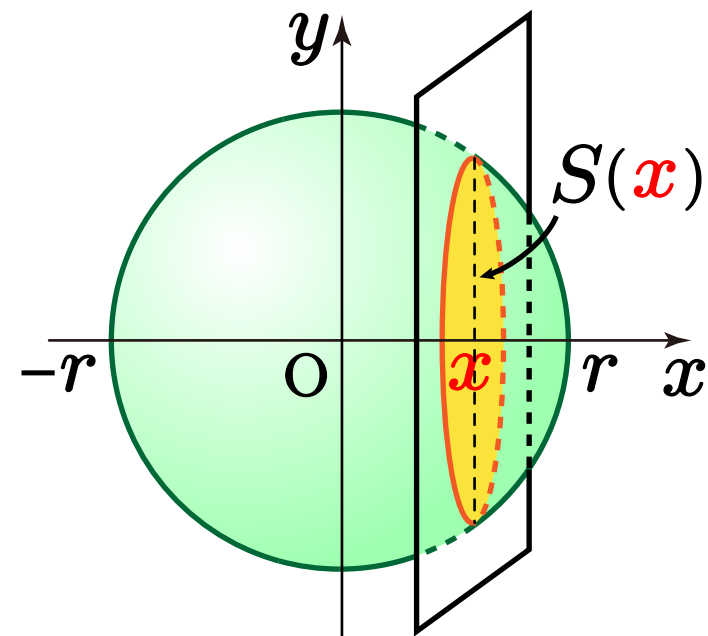
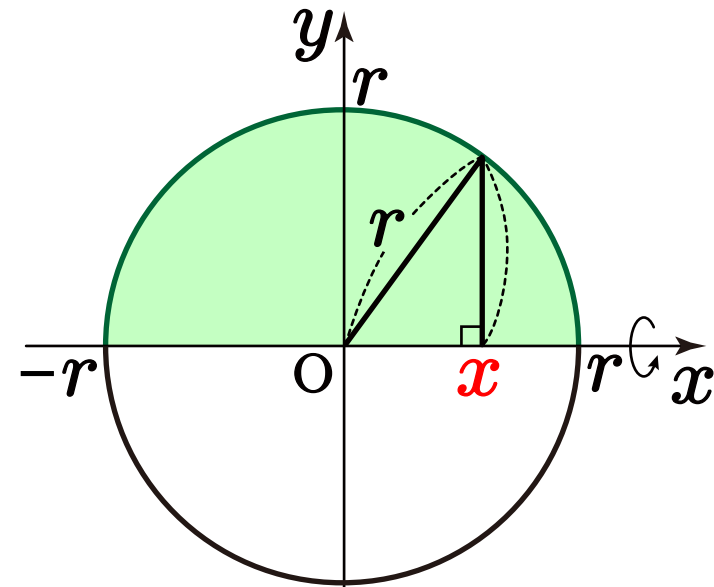
ただし $a < b$ とする.

球の体積

半径 r の球は，図のような半円 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸が囲む部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である．

よって，この球の体積は，

$$\int_{-r}^r$$



例題

曲線 $y = \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) と x 軸が囲む部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

【解】 $V =$