数学 III

第 6 章　「積分法の応用」

4. 媒介変数表示された曲線と面積

hm3-6-4

(pdf ファイル)

媒介変数表示された曲線

媒介変数表示

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

によって定義される関数の積分 $\displaystyle\int y\ dx$ は，置換積分法を用いて，

$$\int y\ dx = \int y \frac{dx}{dt}\ dt$$

のように，**媒介変数を積分変数にとって** 計算することができる．

サイクロイドで囲まれた部分の面積

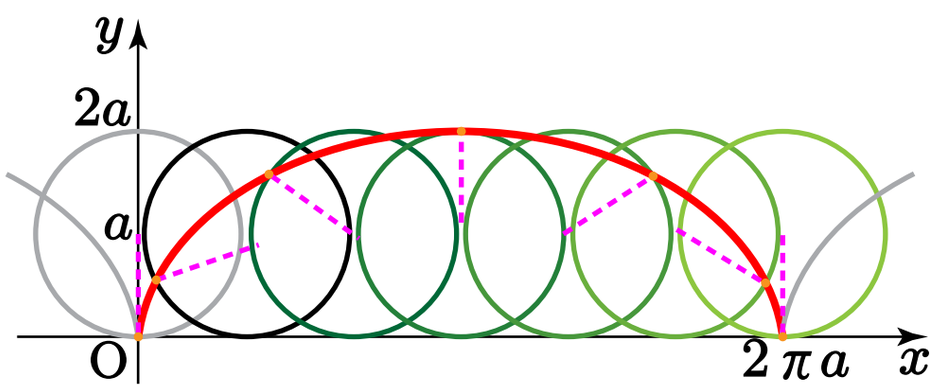
例題

a を正の定数として，媒介変数表示

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$$
$$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

の表す曲線と x 軸が囲む部分の面積 S を求めよ．

この曲線を **サイクロイド** という．サイクロイドは，定直線に接しながら，すべらずに転がる円の円周上の１点が描く軌跡である．



$x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$の概形

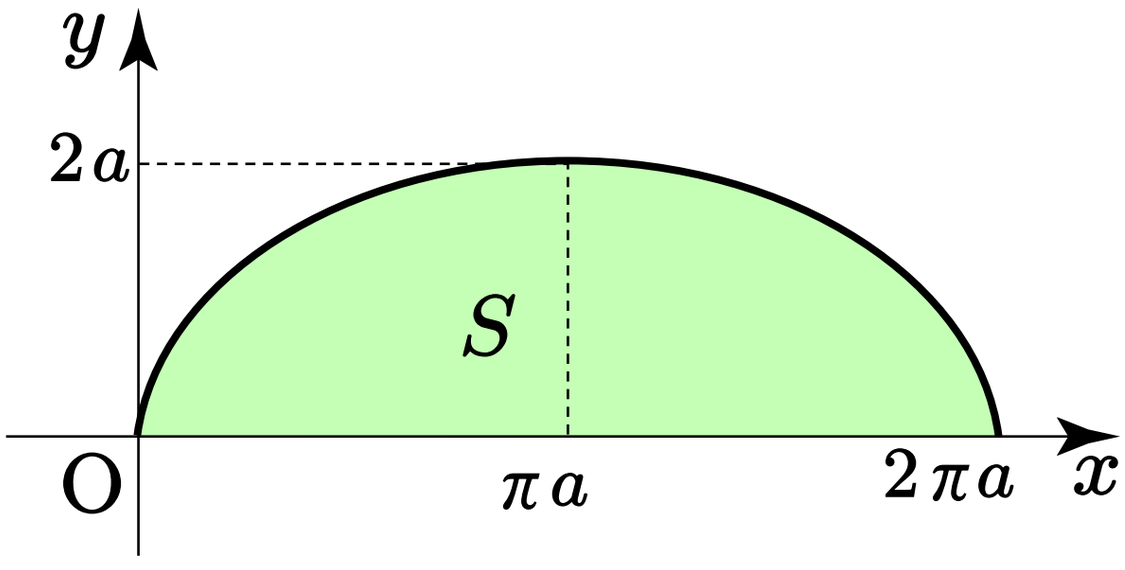
【解】x, y を θ の関数と見て微分すると,

$$x' = \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \qquad y' = \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

したがって，x, y の増減は，以下のようになる．

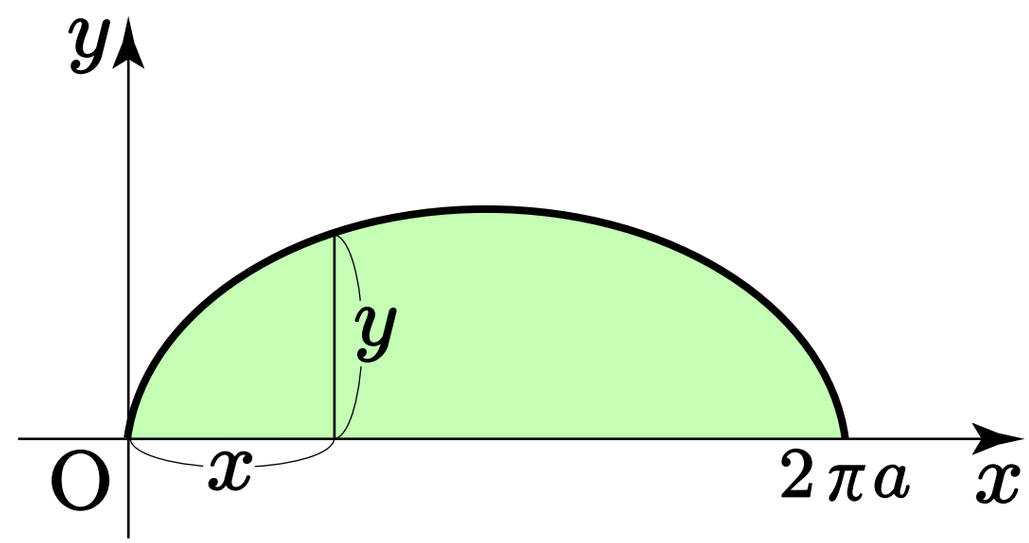
θ	0	$\cdots$		$\cdots$	2π
x'					
x					
y'					
y					

曲線の概形



面積の計算

求める面積は，$S = \int_0^{2\pi a} y\ dx$ という積分で表されるが，置換積分法を用いて，積分変数を θ に換えると，

$$S = \int$$

$$=$$