数学 III

第6章 「積分法の応用」

20. 区分求積法

hm3-6-20

(pdf ファイル)

図分球遺跡の選ぶ

 $x_0=0, x_n=1$ を両端とする区間[0,1]のn等分点を

$$x_k=rac{k}{n}\;(k=1,2,\cdots,n-1)$$

として、分割の幅を $\Delta x = \frac{1}{n}$ とおくと、 $f(x) = x^2$ に対して、次の等式が成り立つことがわかった。

$$\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k) {\it \Delta} x = \int_0^1 f(x) dx$$

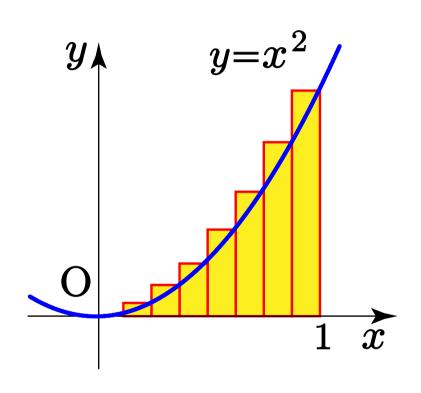
このように、積分区間の分割に基づいて作られた数列の和をもとに、その極限として定積分の値に迫る考え方を、区分が遺跡という。

図の歌意識のアイデア

曲線 $y=x^2$, x 軸, 直線 x=1 で囲まれた図形 D の面積は次のような方法で求めることもできる.

両端を $x_0=1,x_n=1$ とする区間[0,1]を、n等分する分点 $x_k=rac{k}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ をとり、 x_{k-1} と x_k を両端とする区間で、高さ $\left(rac{k}{n}
ight)^2$ の長方形を作る.

 $(k=1,2,3,\cdots,n)$



これらの長方形の面積の和 S_n は、図形Dの面積より大きいが、 $n \to \infty$ として分割を限りなく細かくしていくと、Dの面積に限りなく近づくと考えられる。

区分球環路(より一般の場合)

区分求積法

閉区間 [a,b] で連続な関数 f(x) に対し、区間 [a,b] をn 等分する点を、両端点を入れて、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

また、分割された小区間の幅を $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ として、

$$\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k) {\it \Delta} x = \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つ.



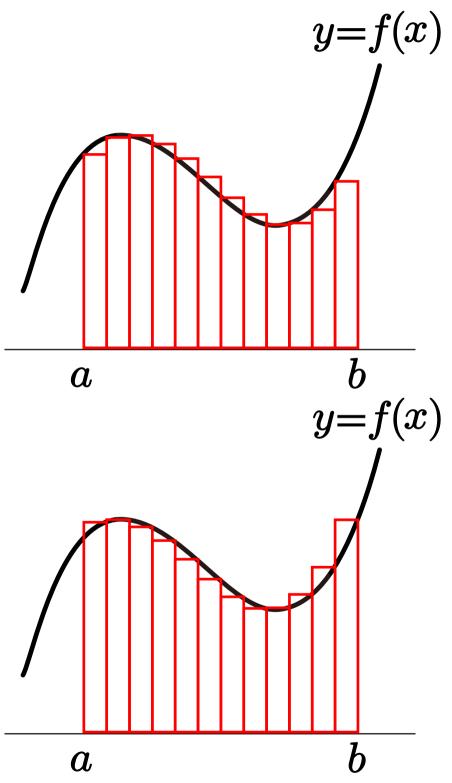
$$\Delta x = rac{b-a}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n)$$

$$\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k){\Delta\!x}$$

$$\lim_{n o\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k){\Delta\hspace{-.03in}} x$$



図の歌意と定意の配号

公式
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx$$
 において、

左辺の和の記号 \sum が右辺の積分記号 \int に,左辺の分割の幅 Δx が右辺の dx に対応している.

この意味で定積分は、いわば無限に多くの、無限に薄い長方形の面積の総和である。

このように,定積分の記号 $\int_a^b f(x) \ dx$ には,区分求積法の意味が込められている.