数学 III

第６章　「積分法の応用」

2. 楕円の面積

hm3-6-2

（pdf ファイル）

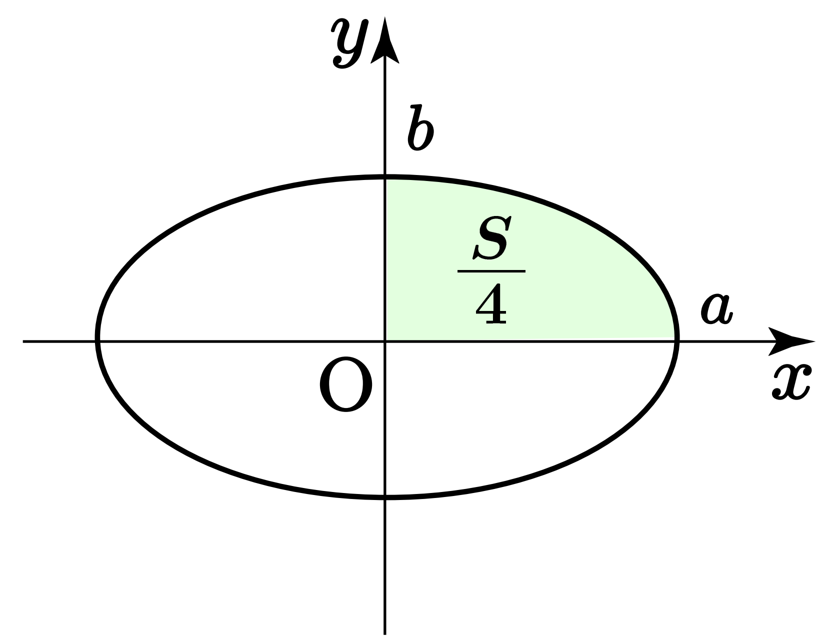
例題

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が囲む部分 D の面積 S を求めよ．ただし，a, b は正の定数とする．

【解】図形 D は x 軸，y 軸に関して対称であるから，その第 1 象限にある部分の面積は $\dfrac{S}{4}$ である． また，$y \geqq 0$ として，楕円の方程式を y について解くと，

$y=$ 　　　　　　　　　となるから，

$\dfrac{S}{4}=$



$$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$x = a\sin\theta \ \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと， $\dfrac{dx}{d\theta} =$ 　　　　　　　　　　で

あるから，

x	$\to$
θ	$\to$

$$\frac{S}{4} =$$

よって， $S = \pi ab$ である．

楕円の面積＝π × 長半径 × 短半径

楕円の面積の計算に関して

S は，半径 a の円の面積 πa^2 の $\dfrac{b}{a}$ 倍に等しい．

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸を基準に，y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍にしたものであることから当然である．

この事実はそもそも，面積を求める積分

$$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$$

の形からもわかる．