数学 III

第 6 章　「積分法の応用」

19. 区分求積法 入門

hm3-6-19

(pdf ファイル)

EDUPA

積分法の応用　学習マップ

求積問題

■ 面積
- カヴァリエリの原理
- 積分変数のとり方
- 媒介変数表示と面積

■ 体積
- 体積計算の基本原理
- 回転体
  基本型，発展型
- 非回転体

■ 【発展】弧長，道のり

定積分の理論

■ 定積分と数列和の評価
- 原理：定積分と不等式
- 単調関数の積分の性質

■ 区分求積法
- 区分求積法とは
- 区分求積法の応用

関数方程式

■ 定積分が定める関数
（積分方程式）

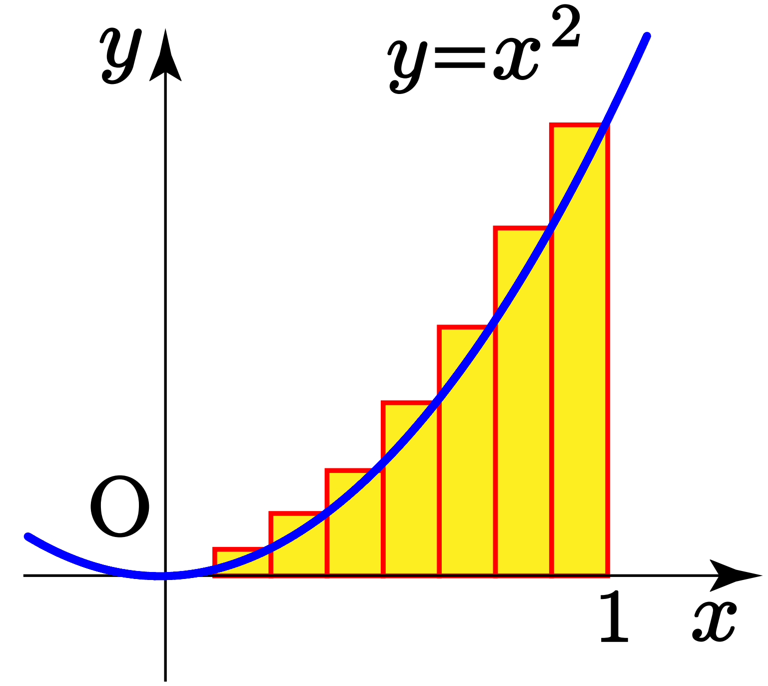
■【発展】微分方程式

区分求積法のアイデア

曲線 $y = x^2$，x 軸，直線 $x = 1$ で囲まれた図形 D の面積は次のような方法で求めることもできる．

両端を $x_0 = 1, x_n = 1$ とする区間 $[0, 1]$ を，n 等分する分点 $x_k = \dfrac{k}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ をとり，x_{k-1} と x_k を両端とする区間で，高さ $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ の長方形を作る．

$(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$



これらの長方形の面積の和 S_n は，図形 D の面積より大きいが，$n \to \infty$ として分割を限りなく細かくしていくと，D の面積に限りなく近づくと考えられる．

区分求積法の正しさの検証

実際,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 =$$

よって,

$$\lim_{n \to \infty} S_n =$$

を得る．これは

$$\int$$

に等しい.

Dの面積に下側から迫る

x_{k-1} と x_k を両端とする区間で高さ $\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2$ の長方形を作る．$(k=1, 2, 3, \cdots, n)$

これらの長方形の面積の和 T_n は図形D の面積より小さいが,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

$$=$$