

第6章 「積分法の応用」

18. 数列和の評価

hm3-6-18

(pdf ファイル)



積分法の応用 学習マップ

求積問題

■ 面積

- カヴァリエリの原理
- 積分変数のとり方
- 媒介変数表示と面積

■ 体積

- 体積計算の基本原則
- 回転体

基本型, 発展型

- 非回転体

■ 【発展】弧長, 道のり

定積分の理論

■ 定積分と数列和の評価

- 原理: 定積分と不等式
- 単調関数の積分の性質

■ 区分求積法

- 区分求積法とは
- 区分求積法の応用

関数方程式

- 定積分が定める関数
(積分方程式)

- 【発展】微分方程式

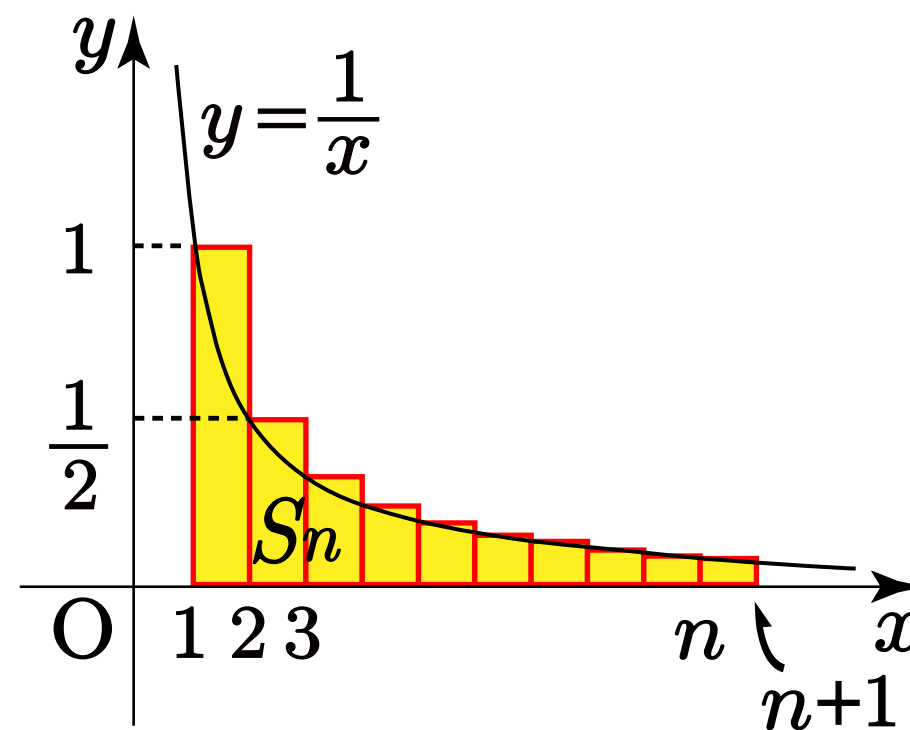
例題

自然数 n に対し、次の不等式を示せ。

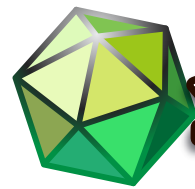
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

【解】 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対し、底辺が1で、高さが $\frac{1}{k}$ の長方形を、右図のように xy 平面上に並べると、これらの長方形の面積の和 S_n は、

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$



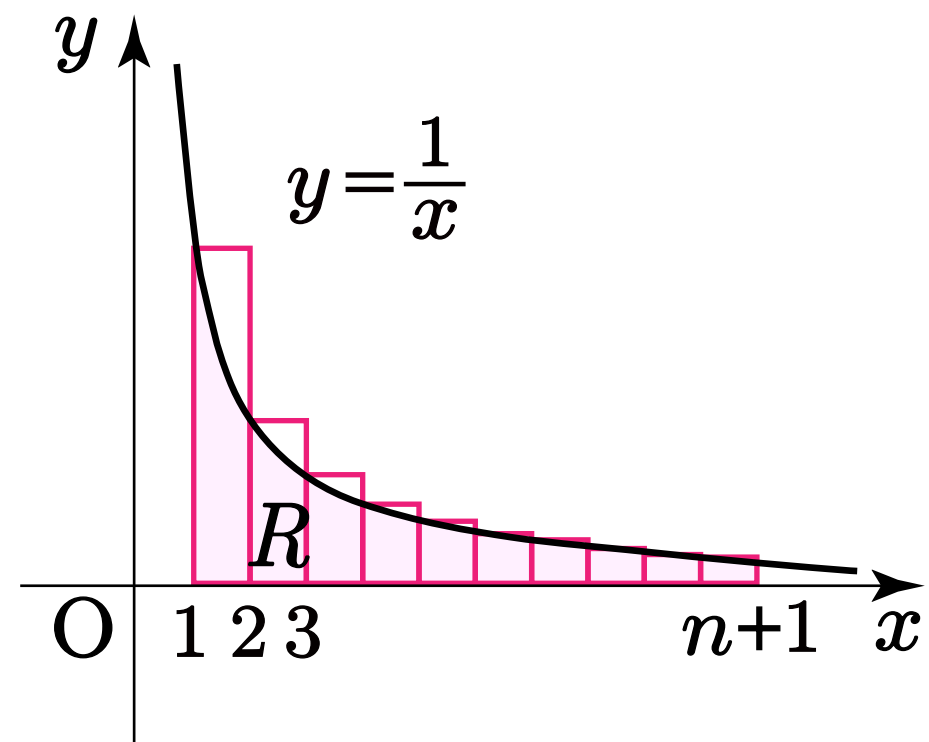
(横軸方向は
縮めている!)

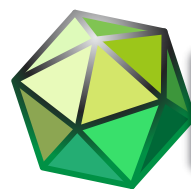


全体は部分より大きい

一方, 曲線 $y = \frac{1}{x}$, および, x 軸と2直線 $x = 1$,
 $x = n + 1$ が囲む部分 R は, S_n の一部分であるから,
$$S_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$=$$





【研究】 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$ の意義

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = \infty$$

であるから、級数 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ は $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ であるにもかかわらず、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

調和級数は発散する!

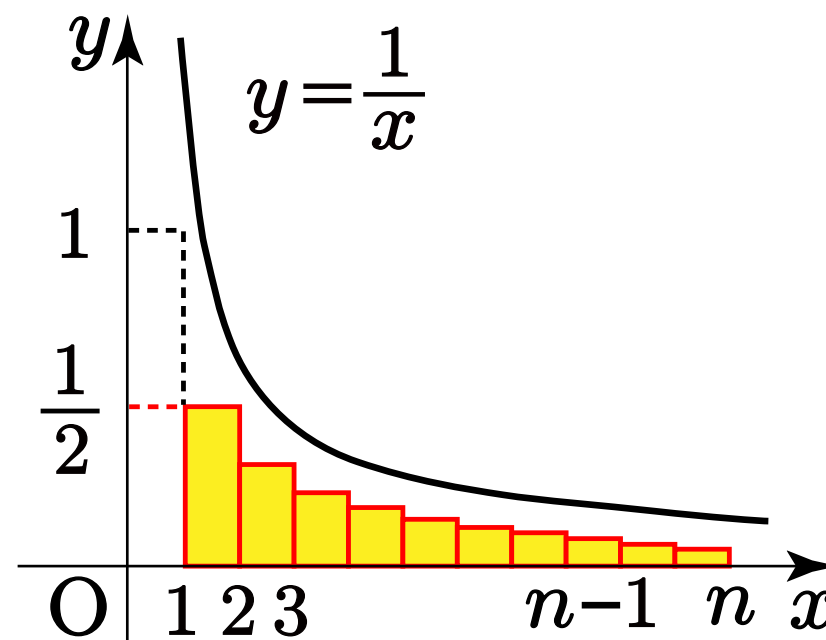
【研究】 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ の評価

すでに示したように,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

他方, 右図より

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \log n$$



$$\therefore \log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$$

◆ 例 $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$ は, $\log 101$ と $1 + \log 100$ の間の値である.