

第6章 「積分法の応用」

15. 瞬間と法則

hm3-6-15

(pdf ファイル)



積分法の応用 学習マップ

求積問題

■ 面積

- カヴァリエリの原理
- 積分変数のとり方
- 媒介変数表示と面積

■ 体積

- 体積計算の基本原則
- 回転体

基本型, 発展型

- 非回転体

■ 【発展】弧長, 道のり

定積分の理論

■ 定積分と数列和の評価

- 原理: 定積分と不等式
- 単調関数の積分の性質

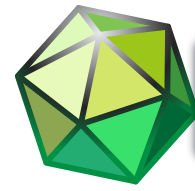
■ 区分求積法

- 区分求積法とは
- 区分求積法の応用

関数方程式

- 定積分が定める関数
(積分方程式)

- 【発展】微分方程式



【探究】瞬間と法則

平均すると時間 T ごとに1回分裂して2倍に増殖するバクテリアを培養しているとする.

時刻 t におけるバクテリアの量を $x(t)$ とし, 極く短い時間 Δt の間に増加するバクテリアの量を Δx とすると,

$$\Delta x \doteq x(t) \frac{\Delta t}{T} \quad \therefore \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \doteq \frac{1}{T} x(t)$$

が成り立つと考えてよい.

ここで, $\Delta t \rightarrow 0$ とすると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T} x(t)$$

微分方程式という法則

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T}x$ のような関係式を **微分方程式** という.

微分方程式で表した増殖の法則に従うバクテリアに対しては, 時刻 $t = 0$ における量 $x(0)$ から, 任意の時刻 t における量が以下のように **予測** できる.

一般に, k を定数として

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \dots (*)$$

という微分方程式を考えると, 関数

$$x(t) = Ce^{kt} \quad \dots (**) \quad (C: \text{定数})$$

は, 上の関係式を満たす.

とくに, $t = 0$ とすると

$$x(0) = C \quad \therefore \quad x(t) = x(0)e^{kt}$$

人口増加への抑制効果

バクテリアや人の数が，どこまでも増加し続けるということとはあり得ない．それは， $x(t)$ が大きくなるに従って，食糧などの生存条件が悪くなり， $x(t)$ の増大に抑制がかかるからである．

そこで， $x(t)$ が小さいときには無視できるが， $x(t)$ が大きくなると効いてくる負の項 $-l\{x(t)\}^2$ を増殖速度に追加して，

$$\frac{dx}{dt} = kx(t) - l\{x(t)\}^2$$

という微分方程式を考えてみよう．

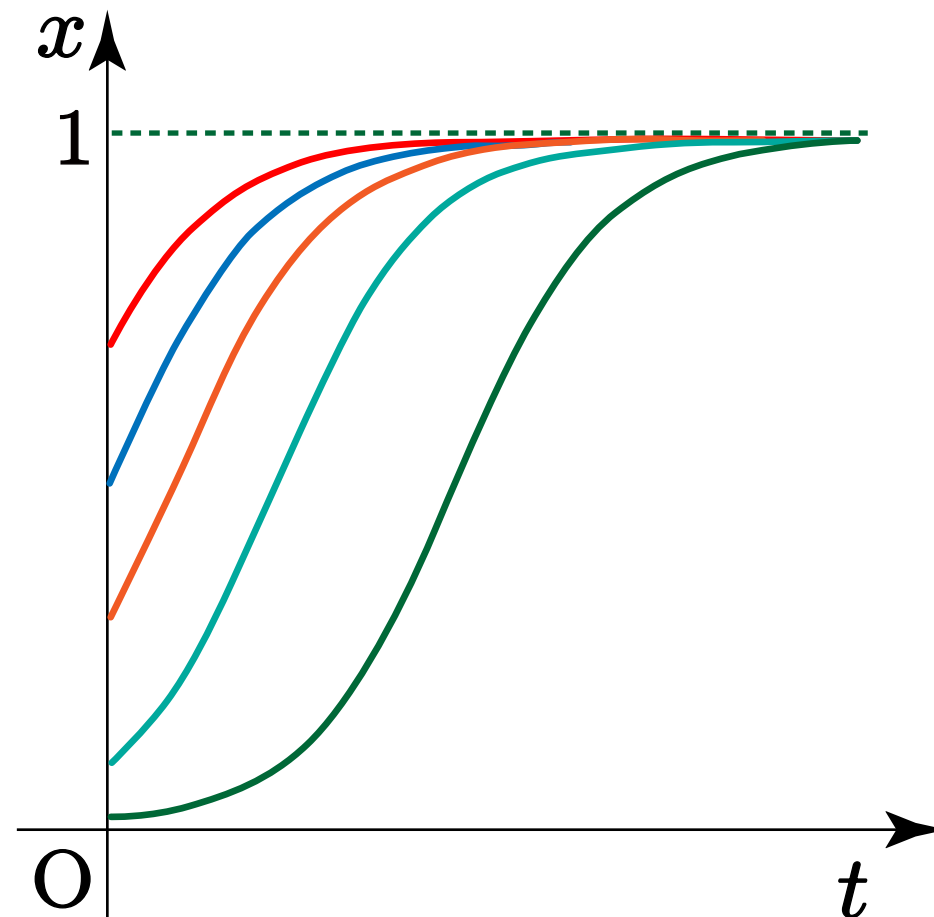
単純化のために， $k = l = 1$ とする．

「成長の限界」

微分方程式 $\frac{dx}{dt} = x - x^2$
の解は，一般に，初期条件から定まる定数 C を用いて，

$$x(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}$$

となり，右の図のようなグラフをもつ．



このような曲線を，ロジスティックカーブ（人口曲線）と呼ぶ．

上の例では， $x = 1$ が「成長の限界」である．