数学 III

第６章　「積分法の応用」

14. 弧長（道のり）2

hm3-6-14

（pdf ファイル）

EDUPA

【発展】 曲線の弧長（道のり）

媒介変数表示

$$x = f(t),\ y = g(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

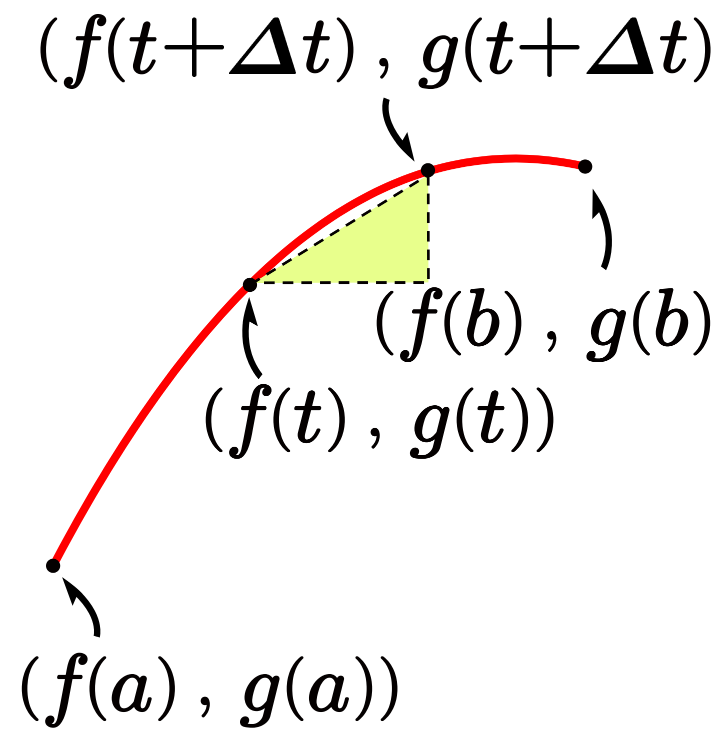
で与えられる曲線を C とする.

C の弧長は, $t = a$ から $t = b$ までの間に点 P が動いた道のり L であり

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

となる.



これが曲線 C の長さである.

もう1つの弧長公式

方程式　$y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$　で与えられる曲線 C は，媒介変数表示

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

で表されると考えると，

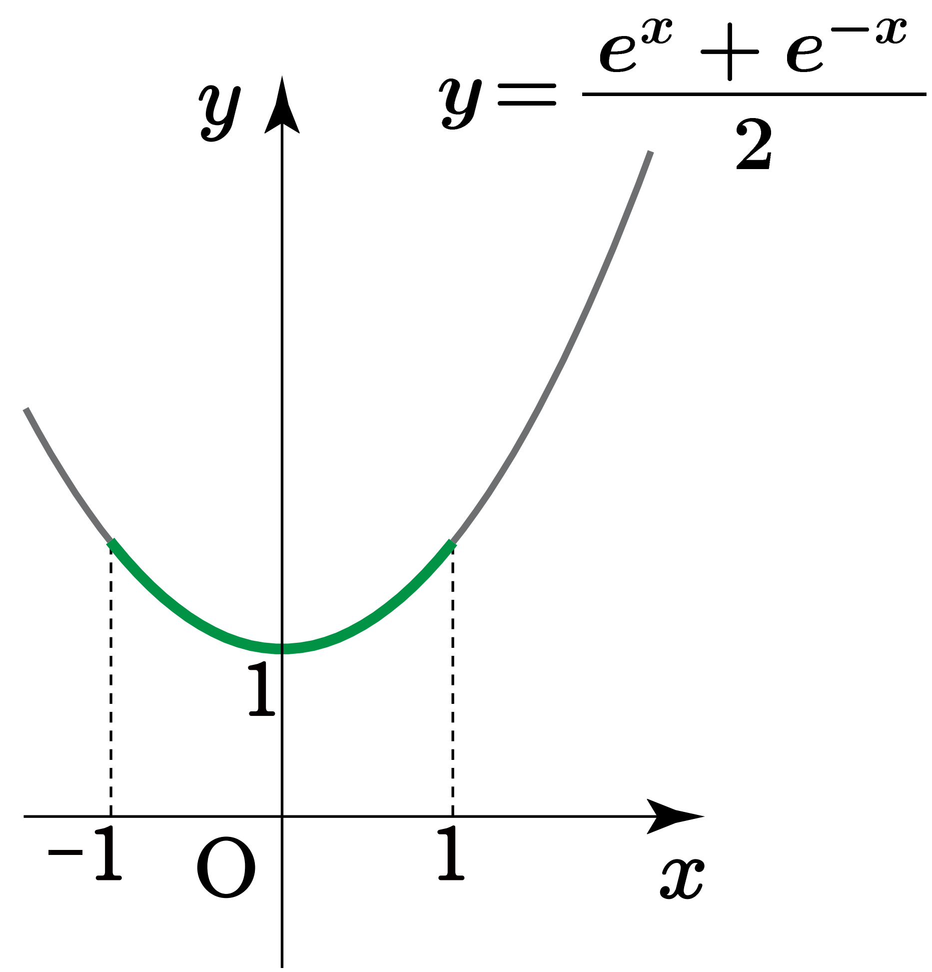
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}\, dt$$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx}$$

カテナリー（懸垂曲線）の弧長

曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めよう.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$



であるから,

$$L =$$

【発展】 放物線の弧長

曲線 $y = x^2 \ (0 \leqq x \leqq 1)$ の長さを L とすると,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$L =$$