

数学 III

第 6 章 「積分法の応用」

13. 弧長(道のり)

hm3-6-13

(pdf ファイル)



【発展】 曲線の弧長 (道のり)

媒介変数表示

$$x = f(t), y = g(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

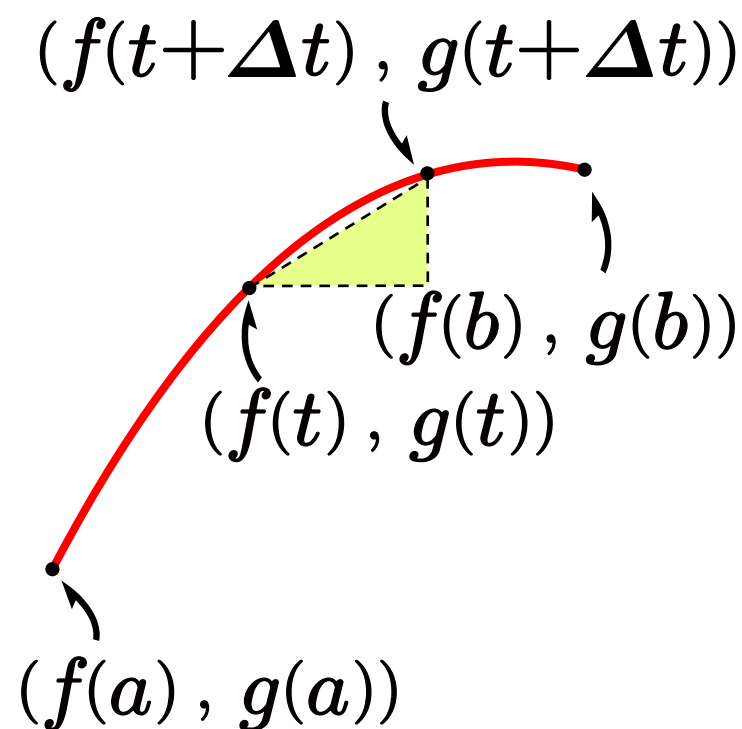
で与えられる曲線を C とする.

C の弧長は, $t = a$ から $t = b$ までの間に点 P が動いた道のり L であり

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

となる.

これが曲線 C の長さである.





容易に求長可能な曲線の例

媒介変数表示

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq T)$$

で与えられる曲線（対数螺旋^{らせん}）の長さを $L(T)$ とすると

$$\frac{dx}{dt} =$$

$$\frac{dy}{dt} =$$

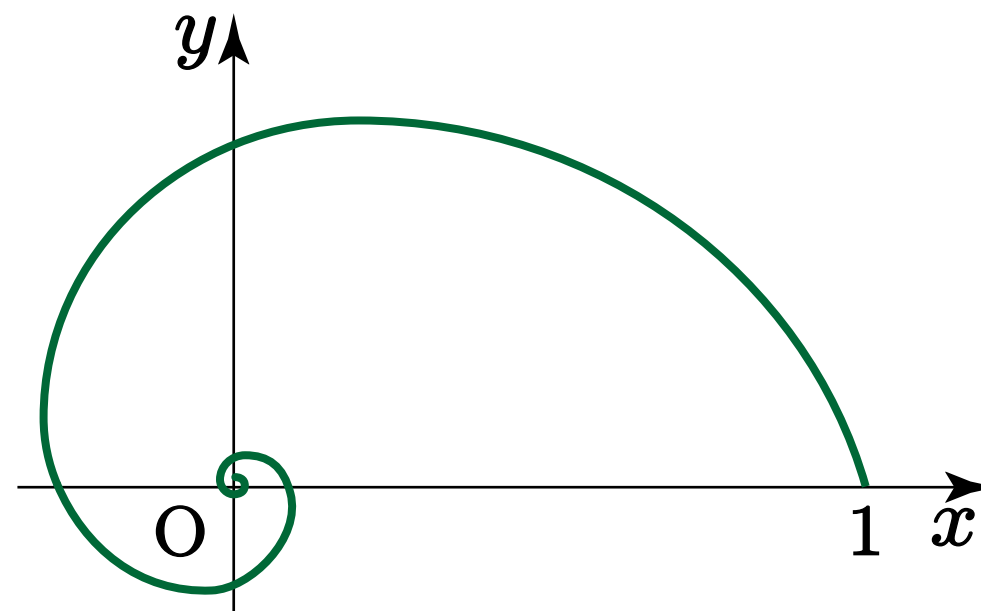
$$\frac{dx}{dt} =$$

$$\frac{dy}{dt} =$$

であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=$$





$t=0$ から $t=T$ までの弧長

$$\begin{aligned} L(T) &= \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{2}e^{-t} dt \\ &= \end{aligned}$$

この結果から, $T \rightarrow \infty$ において, $L(T)$ は 収束する.

無限に回転が続く. だが, 長さは有限!