数学 III

第 6 章　「積分法の応用」

# 12. 回転体の体積へのもう ひとつのアプローチ

# hm3-6-12

(pdf ファイル)

# 積分法の応用　学習マップ

## 求積問題

■ 面積
- カヴァリエリの原理
- 積分変数のとり方
- 媒介変数表示と面積

■ 体積
- 体積計算の基本原理
- 回転体
  基本型，発展型
- 非回転体

■ 【発展】弧長，道のり

## 定積分の理論

■ 定積分と数列和の評価
- 原理：定積分と不等式
- 単調関数の積分の性質

■ 区分求積法
- 区分求積法とは
- 区分求積法の応用

## 関数方程式

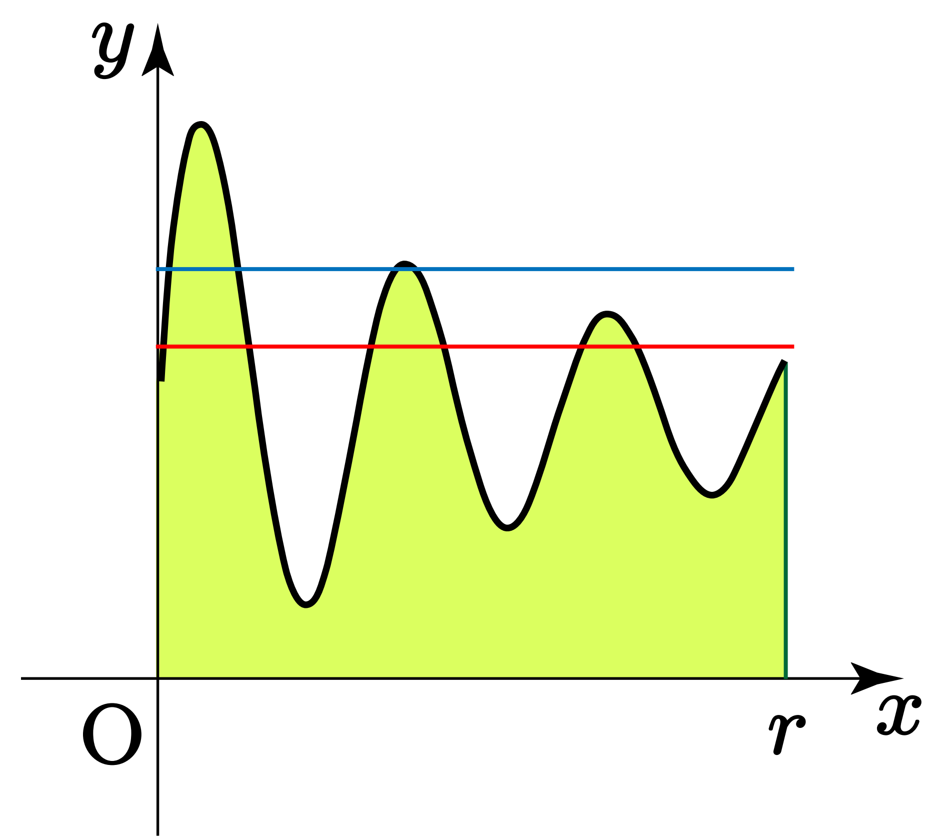
■ 定積分が定める関数（積分方程式）

■【発展】微分方程式

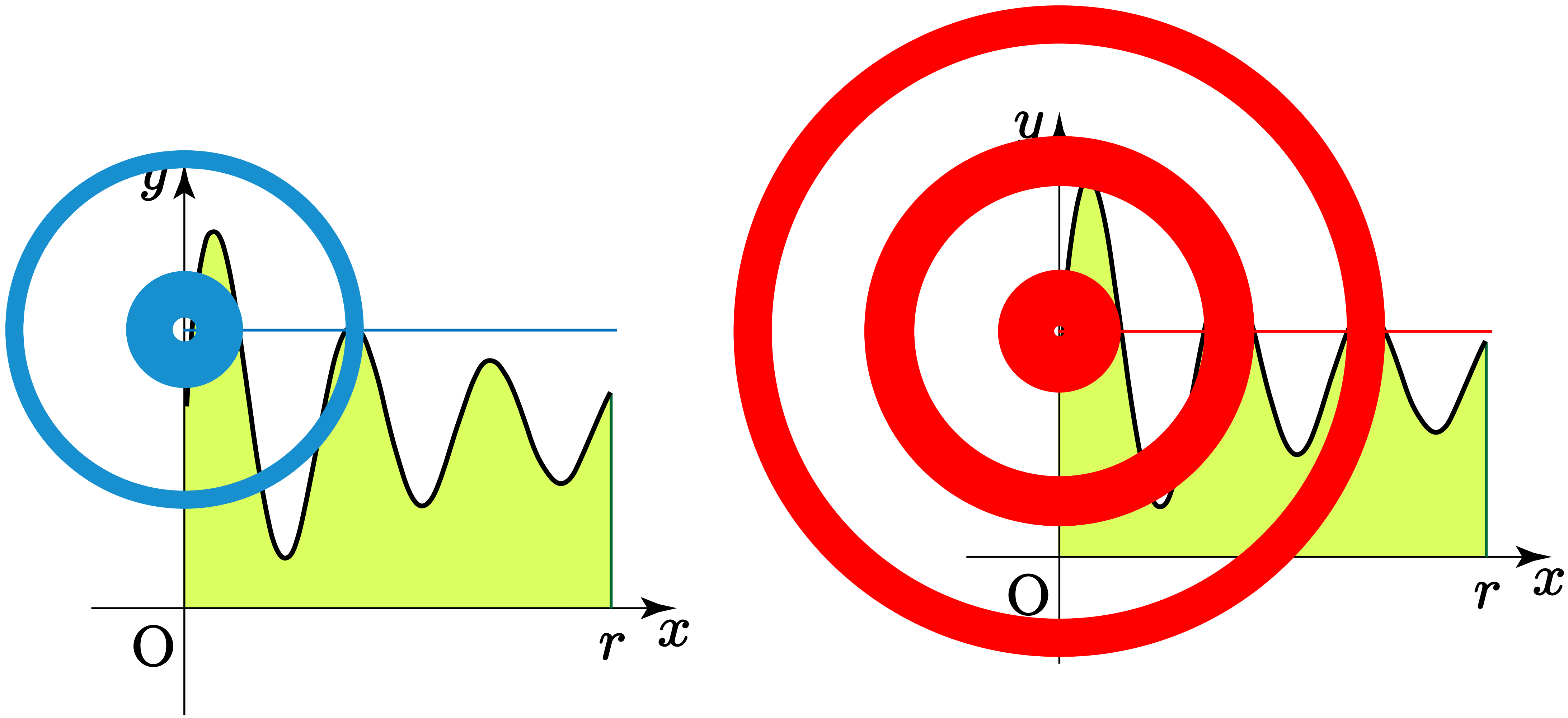
# 【探究】回転体へのもう一つのアプローチ

回転体の体積を積分によって求めるには，回転軸に垂直な平面による断面を考えるのが原則である．

しかし，右の図のような領域を $y$ 軸を回転軸として回転してできる立体の場合は，$y$ 軸に垂直な平面で切った断面は，かなり複雑な形になり，簡単な公式で断面積を求めることができない．




このような場合にも有効な公式を作ろう．



y
O
r
x
y
O
r
x

# 薄い円筒

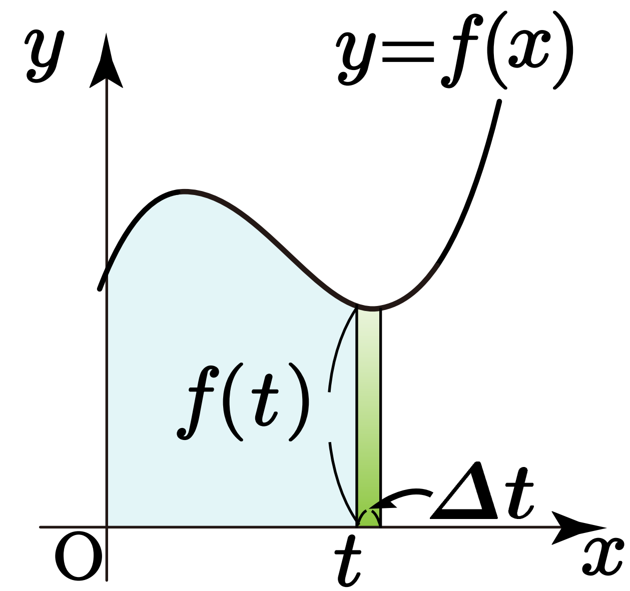
正の数 $t$ と $f(x) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq t)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し，不等式

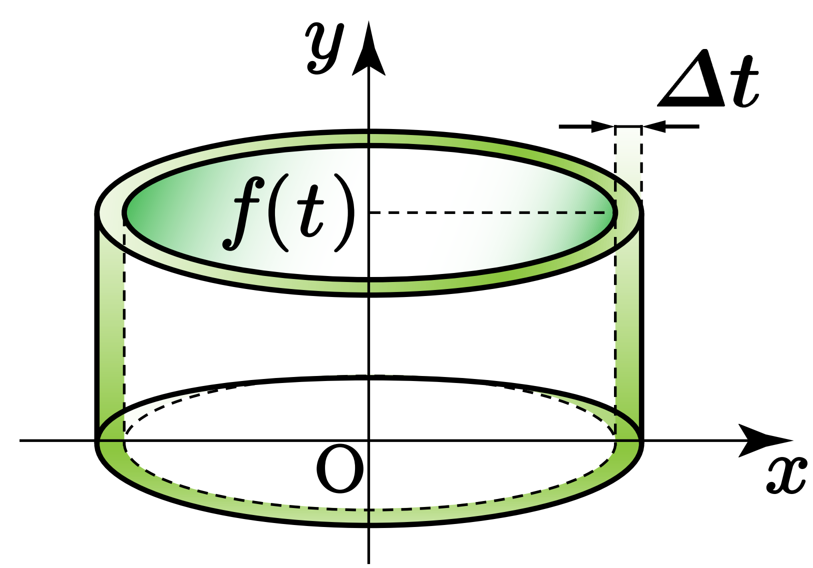
$$0 \leqq y \leqq f(x),\ 0 \leqq x \leqq t$$

が表す領域を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を $V(t)$ とし，$\Delta t$ を $t$ の正の微小増分として，これに対する体積の微小増分

$$\Delta V = V(t+\Delta t) - V(t)$$

を考える.



$\boldsymbol{\Delta V}$ は，底面積が

$$\pi(t+\Delta t)^2 - \pi t^2$$

$$=$$

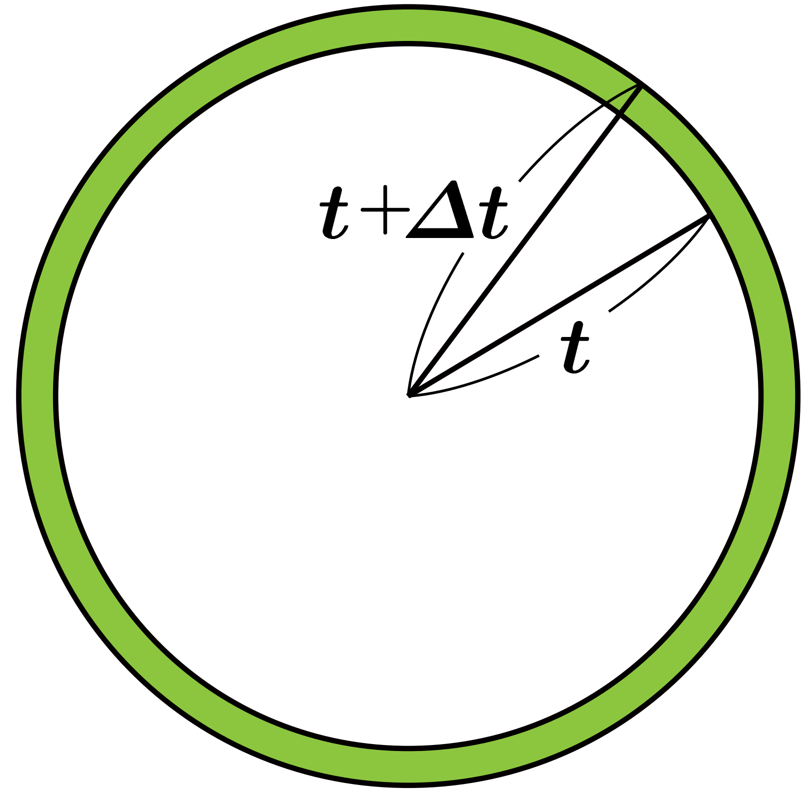
で，高さ $f(t)$ の立体の体積にほぼ等しい.

すなわち，　$\Delta V \fallingdotseq$

よって，　$\dfrac{\Delta V}{\Delta t} \fallingdotseq$

そこで $\Delta t \to 0$ とすると，

$$\frac{dV}{dt} =$$

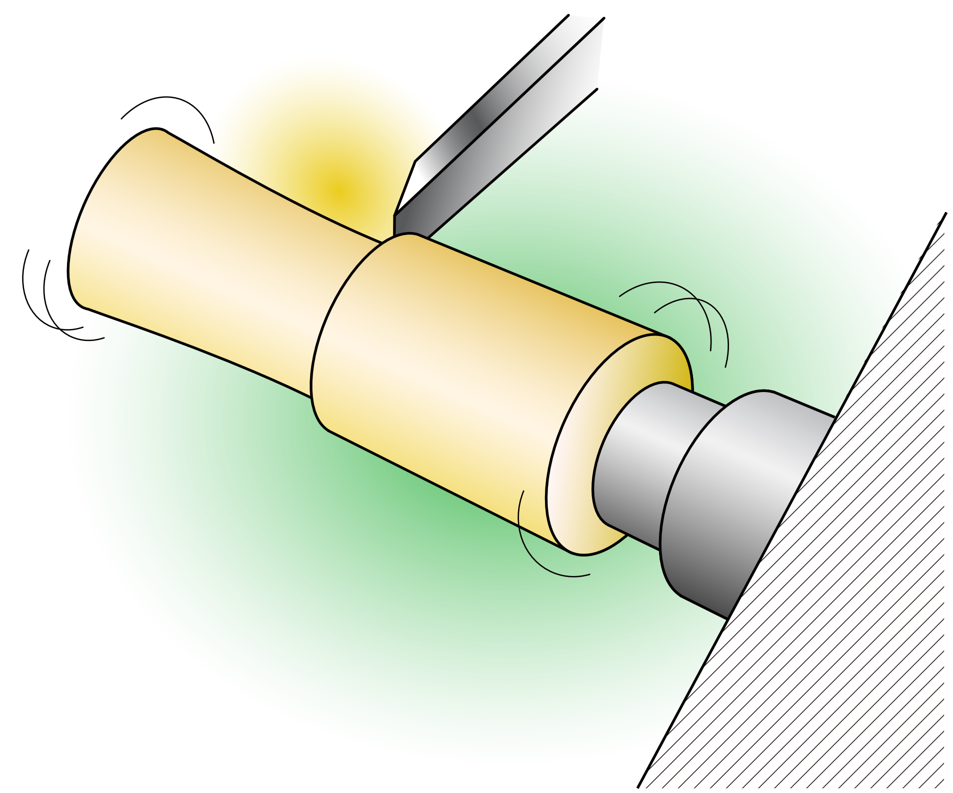


## $\dfrac{dV}{dt}=2\pi t f(t)$

これと，$V(0)=0$ とから，

$$\boxed{V(r)=\int_0^r 2\pi x f(x)\,dx}$$

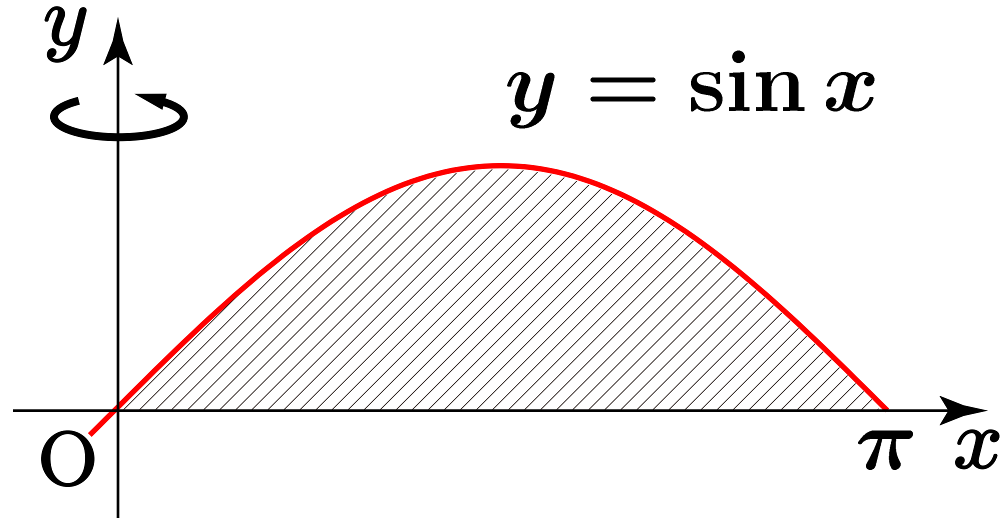
この考え方は，丸い木材を円形の年輪にそって外側から削ってゆくように，回転体をきわめて薄い円柱の殻に分けることにたとえられる．



## 例

曲線 $y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $x$ 軸で囲まれる部分を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は

$$\int$$

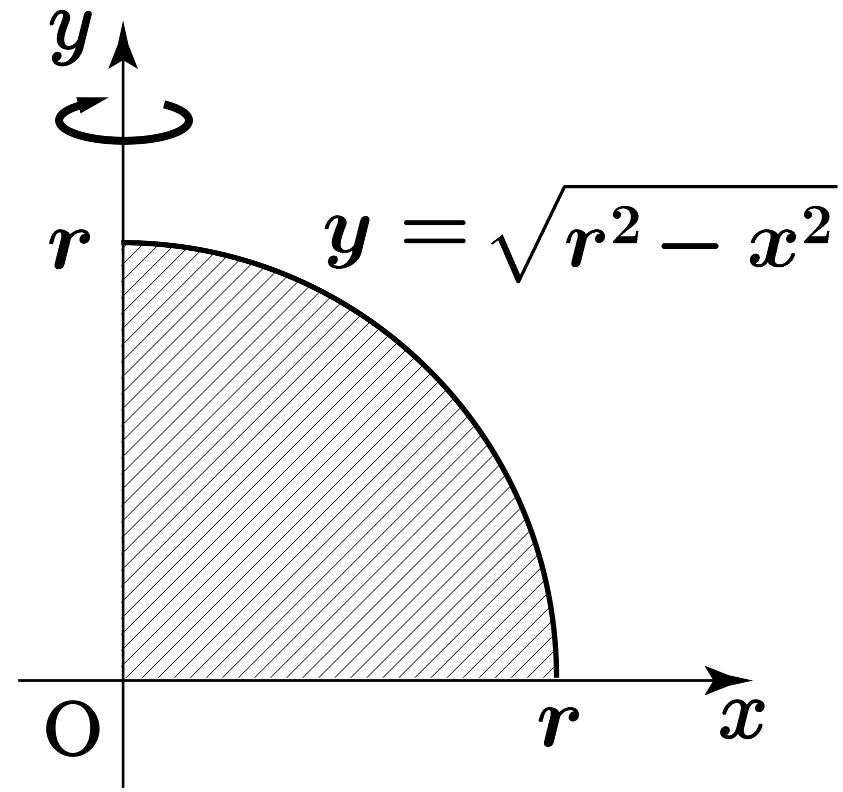


# 半球の体積

半径 $r$ の半球の体積は,

$$\int_0^r 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$=$



# 球の表面積

　半径 $r$ の球の体積を $V(r)$，表面積を $S(r)$ とすると，半径 $r+\Delta r$，および半径 $r$ の同心球の間にはさまれた部分の体積 $\Delta V$ は

$$\Delta V = V(r+\Delta r) - V(r) \fallingdotseq S(r)\Delta r$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} \fallingdotseq \qquad\qquad \therefore \quad \frac{dV}{dr} =$$

　そこで，$V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ を用いると，

$$S(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) =$$

が得られる.