

第 5 章 「積分法」

7. 置換積分法

hm3-5-7

(pdf ファイル)



積分法 学習マップ(1)

積分の理論

■ 積分の基礎概念

原始関数, 不定積分,
定積分

■ 不定積分の計算の理論

- 不定積分の線型性
- 不定積分の計算技法
 - ・ 置換積分法
 - ・ 部分積分法
 - ・ 部分分数分解

■ 定積分の計算の理論

- 定積分の線型性
- 加法性
- 定積分の計算技法
 - ・ 置換積分法
 - ・ 部分積分法

■ 区分求積法

■ 定積分の評価

■ 定積分が定める関数



積分法 学習マップ(2)

積分の計算

- べき関数

- $\int x^{\alpha} dx$ ($\alpha \neq -1$ のとき) • $\int \frac{1}{x} dx$

- 有理関数

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx, \int \frac{x}{x^2 + 1} dx, \int \frac{1}{x^2 + 1} dx, \dots$$

- 三角関数

$$\begin{aligned} &\int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sin^2 x dx, \\ &\int \sin^3 x dx, \quad \int \sin^4 x dx, \quad \int \tan x dx, \dots \end{aligned}$$

置換積分法

関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとする. すなわち,
とする. ここで $x = u(t)$ とおいて, 合成関数 $F(u(t))$ を考える. そして $u(t)$ が t で微分可能であるとして, $F(u(t))$ を t で微分すると,

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) =$$

となる. よって, t の関数 $F(u(t))$ は $F'(u(t))u'(t)$ の原始関数である.

$$\int F'(u(t))u'(t) dt = F(u(t)) + C$$

ゆえに

$$\int f(u(t))u'(t) dt = F(u(t)) + C$$

ここで、 $x = u(t)$ であるから、

$$F(u(t)) + C = F(x) + C = \int f(x) \, dx$$

$$\therefore \int f(u(t))u'(t) \, dt = \int f(x) \, dx$$

この公式を用いて積分する方法を、**置換積分法** という。

関係式 $x = u(t)$ のもとで、次式が成り立つ。

$$\int f(x) \, dx = \int f(u(t))u'(t) \, dt$$

注意

これは次のように書くこともできる。

$$\int f(x) \, dx = \int f(u(t)) \frac{dx}{dt} \, dt$$

置換積分の例 (1) — $\int x\sqrt{x+1} dx$

$$\sqrt{x+1} = t \quad \text{すなわち}$$

とおく.

$$\frac{dx}{dt} =$$

に注意して, 置換積分法を用いると,

$$\int x\sqrt{x+1} dx =$$

置換積分の例 (2) — $\int \frac{\log x}{x} dx$

$$\log x = t \quad \text{すなわち}$$

とおく． $\frac{dx}{dt} =$ に注意して，置換積分法を用いると，

$$\int \frac{\log x}{x} dx =$$