数学 III

第５章　「積分法」

6. 自然対数の底 e の実際的な計算法

---

hm3-5-6

(pdf ファイル)

EDUPA

【発展】Euler の定数の計算法

関数 e^x のべき級数展開

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

において，特に，

$$x = 1$$

とおくと

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

【発展】 $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

この右辺は極めて収束が速い.

実際, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ とおくと,

$$S_1=2,\quad S_2=2.5,\quad S_3=2.666\cdots,$$

$$\cdots,\quad S_{10}=2.71828180\cdots,\quad\cdots$$

で, たった最初の 10 項でも, e の真の値と小数点以下７桁まで一致する！

他方, $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ あるいは $f(t)=(1+t)^{\frac{1}{t}}$ では,

$a_{10}=f(0.1)$ では, $\quad 2.5937424\cdots$

$a_{1000}=f(0.001)$ ですら, $\quad 2.7048138\cdots$