

第 5 章 「積分法」

$$19. I_n = \int \sin^n x \, dx$$

hm3-5-19

(pdf ファイル)



積分法 学習マップ(2)

積分の計算

- べき関数

- $\int x^\alpha dx$ ($\alpha \neq -1$ のとき) • $\int \frac{1}{x} dx$

- 有理関数

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx, \int \frac{x}{x^2 + 1} dx, \int \frac{1}{x^2 + 1} dx, \dots$$

- 三角関数

$$\int \sin x dx, \int \cos x dx, \int \sin^2 x dx,$$
$$\int \sin^3 x dx, \int \sin^4 x dx, \int \tan x dx, \dots$$

【探究】 $\sin^n x$ の積分

定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

を考える.

$n = 0, 1$ のときは, それぞれ

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx =$$

$n \geq 2$ に対して I_n を求めるには, 次のように部分積分を用いて数列 $\{I_n\}$ が満たす漸化式をつくる.


$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

$n \geq 2$ のとき

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \left[\sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x)' \cdot (-\cos x) \, dx$$

=

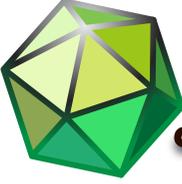

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx$$

したがって、

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つ。


$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

この漸化式と、 $I_0 = \frac{\pi}{2}$ 、 $I_1 = 1$ により、任意の正の整数 n に対して I_n を求めることができる。

たとえば、 $I_2 =$

$$I_3 =$$

$$I_4 =$$

$$I_5 =$$

.....



$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

一般に,

n が偶数のとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

n が奇数のとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- 指数関数

$$\int a^x dx, \int e^x dx$$

- 対数関数

$$\int \log x dx$$

- 混合関数

$$\int x e^x dx, \int x \log x dx,$$

$$\int x \cos x dx, \int e^x \sin x dx, \dots$$

- 意外に難しい例

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\sin^2 x}, \int \frac{dx}{\sin^3 x}, \dots$$