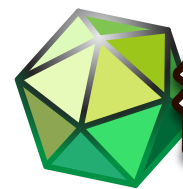


第4章 「微分法的应用」

8. 2次導関数と凹凸

hm3-4-8

(pdf ファイル)



微分法の応用 学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
平均値の定理の証明

変曲点, 漸近線)

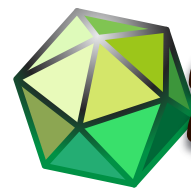
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
(速度, 加速度, 速さ)

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
(増減, 極値, 凹凸,

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
(積分方程式, 微分方程式)



2次導関数の符号と凹凸(1)

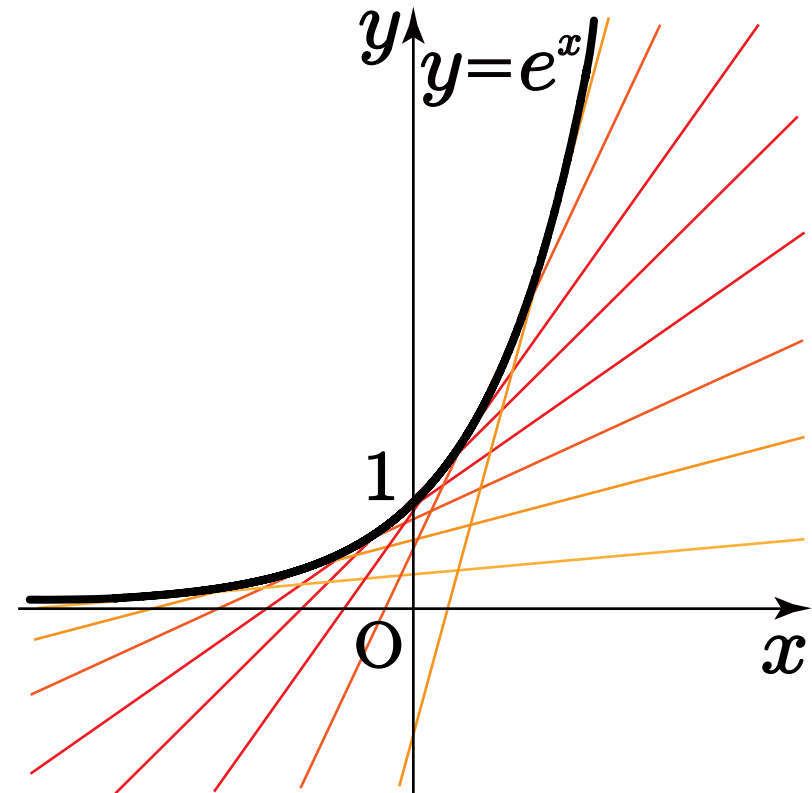
関数 $f(x) = e^x$ については,

$$f'(x) =$$

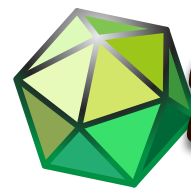
$$f''(x) =$$

ゆえに, 任意の実数 x に対して,
 $f''(x)$ である.

よって, $f'(x)$ は単調 する.



これは, x が大きくなるにしたがって, グラフの接線の傾きが増加することを意味する. このようなグラフは, **下に凸** convex (上に凹) であるという.



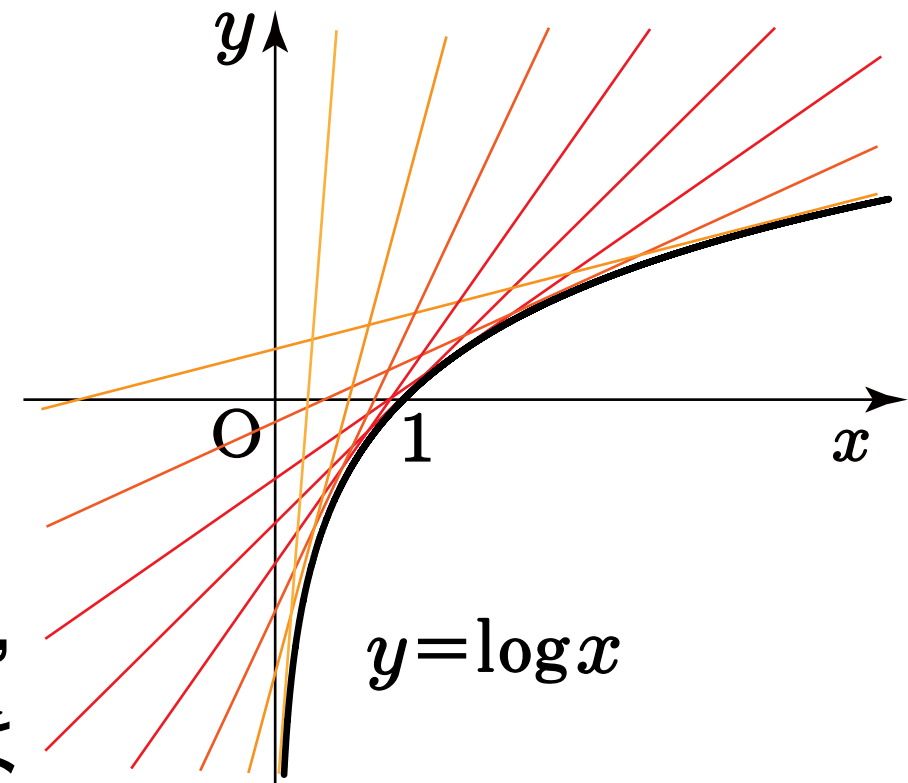
2次導関数の符号と凹凸(2)

関数 $g(x) = \log x$ について
は,

$$g'(x) =$$

$$g''(x) =$$

であるから, 区間 $x > 0$ で,
 $g''(x)$ となり, $g'(x)$ は
区間 $x > 0$ で, する.



これは, 区間 $x > 0$ で, x が大きくなるにしたがって, グラフの接線の傾きが減少することを意味する. このようなグラフは, **上に凸** (下に凹 concave) であるという.

2次導関数の符号と凹凸

関数 $f(x)$ が2回微分可能であるとき

$f''(x) > 0$ をみたす区間で,

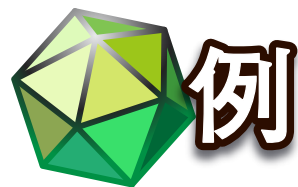
$y = f(x)$ のグラフは 下に凸,

$f''(x) < 0$ をみたす区間で,

$y = f(x)$ のグラフは 上に凸

である.

注意 凹凸を論ずるときは, 出発点となる“凹”“凸”の定義が明確でないので, 区間が開いているか, 閉じているかなど厳密な議論は要求されない.



例

$y = x^3 - x$ のグラフの凹凸を調べよう.

$y' =$, $y'' =$ であるから,

区間 $x < 0$ で, y' ,

よってこの区間で上に凸

区間 $x > 0$ で, y'' ,

よってこの区間で下に凸

