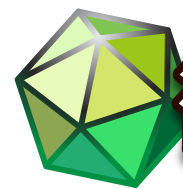


第4章 「微分法の応用」

6. 極値と微分係数

hm3-4-6

(pdf ファイル)



微分法の応用 学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
平均値の定理の証明

変曲点, 漸近線)

- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
(速度, 加速度, 速さ)

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
(増減, 極値, 凹凸,

さらなる応用

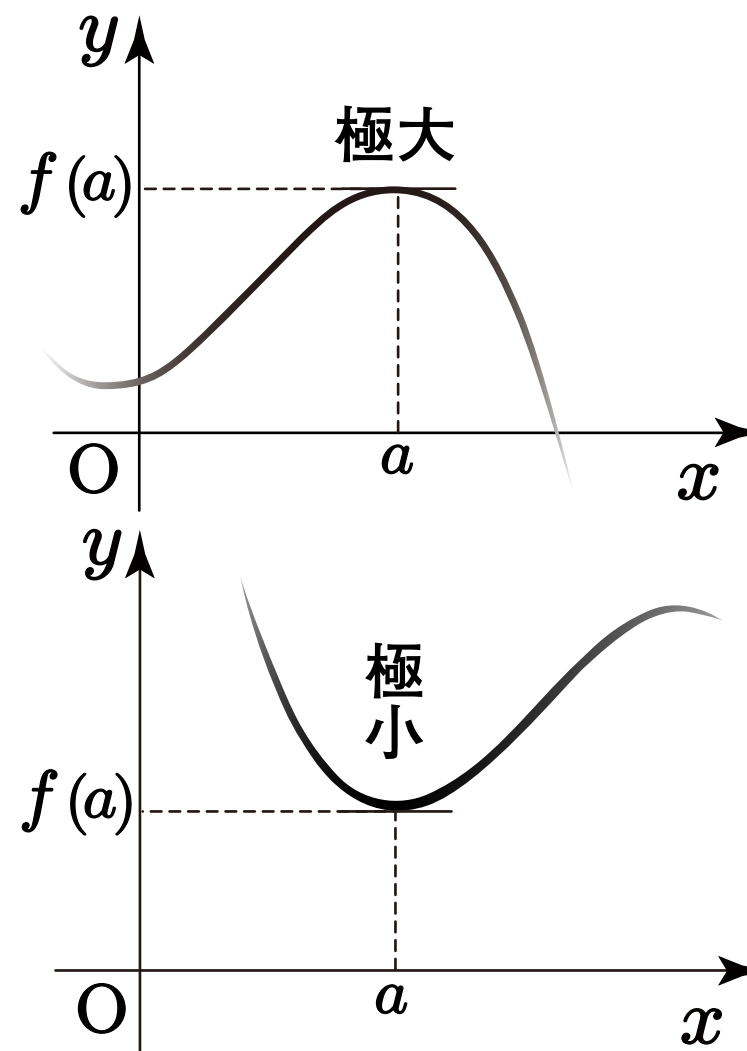
- 無限級数展開
- 関数方程式
(積分方程式, 微分方程式)

関数の極値

a を含む十分小さい区間に限ってみたとき, $f(x)$ の $x = a$ における値 $f(a)$ が, 関数 $f(x)$ の唯一の最大値を与えるなら, $f(x)$ は $x = a$ において **極大** になるといい, $f(a)$ を **極大値** という.

また, $f(a)$ が唯一の最小値を与えるなら, $f(x)$ は $x = a$ で **極小** になるといい, $f(a)$ を **極小値** という.

極大値と極小値をまとめて **極値** という.





微分係数と極値(1)

$x = a$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば、 $f'(a) = 0$ となる.

証明 関数 $f(x)$ が $x = a$ で極小となるとすると、 $x = a$ の近くでは、 $f(x) - f(a) \geq 0$ が成り立つ.

x が右から a に近付くとき、 $x - a > 0$ であるから

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

x が左から a に近付くとき、 $x - a < 0$ であるから

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

0以上かつ0以下とは

$f(x)$ は $x = a$ で微分可能だから, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ の $x = a$ における右側極限と左側極限は一致して, $f'(a)$ となる. よって,

$$f(a) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad f'(a) \geq 0$$

すなわち

$$f'(a) = 0$$

が成り立つ.

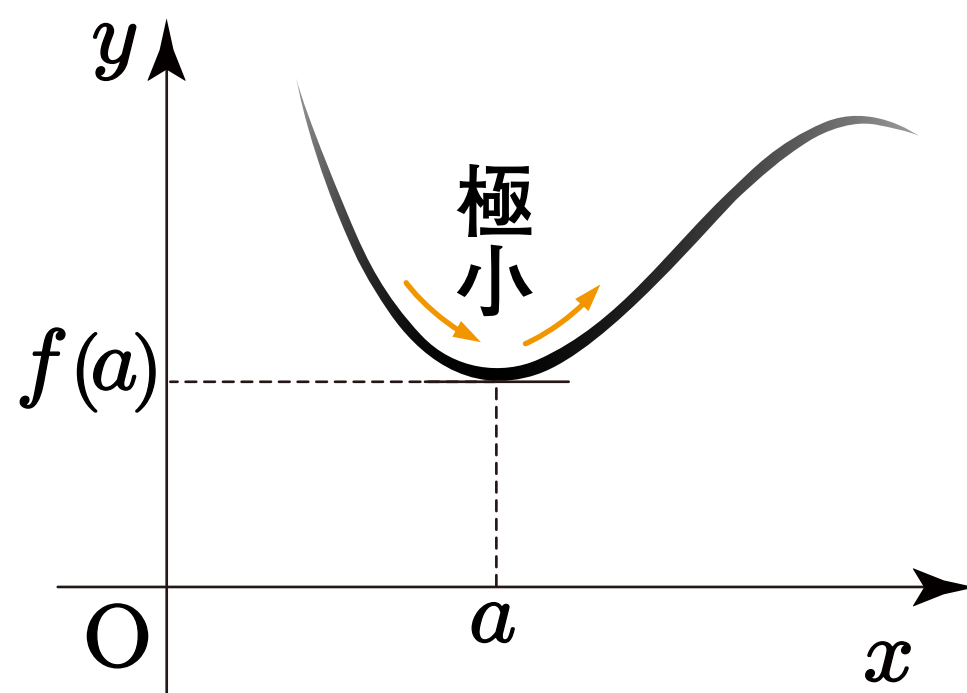
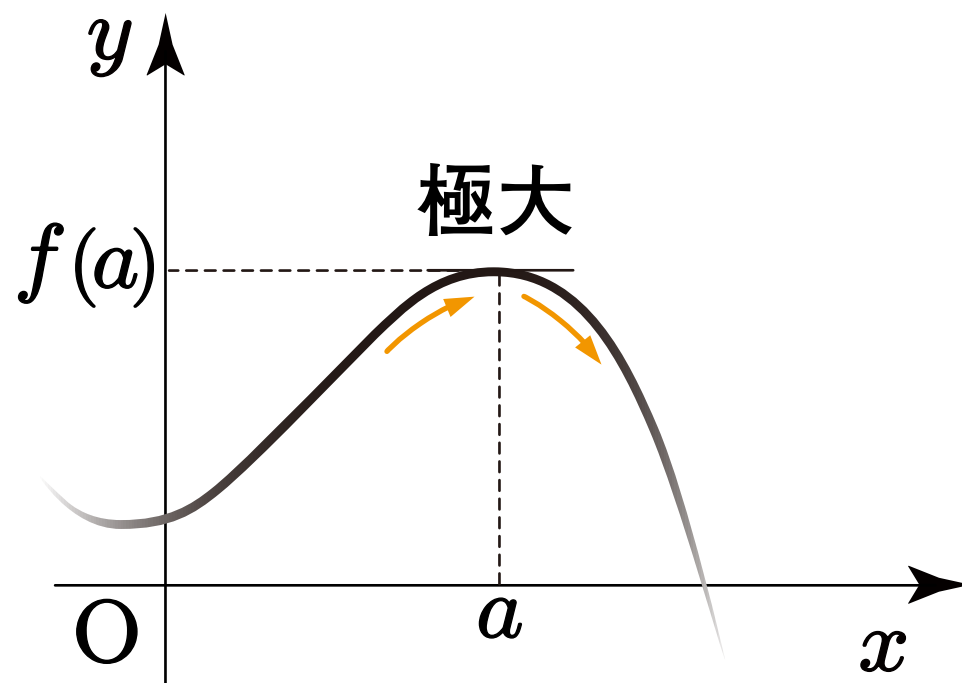
極大となる場合も, 同様である. ■

微分係数と極値 (2)

$x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が

正から負 に変われば, $x = a$ で $f(x)$ は **極大**

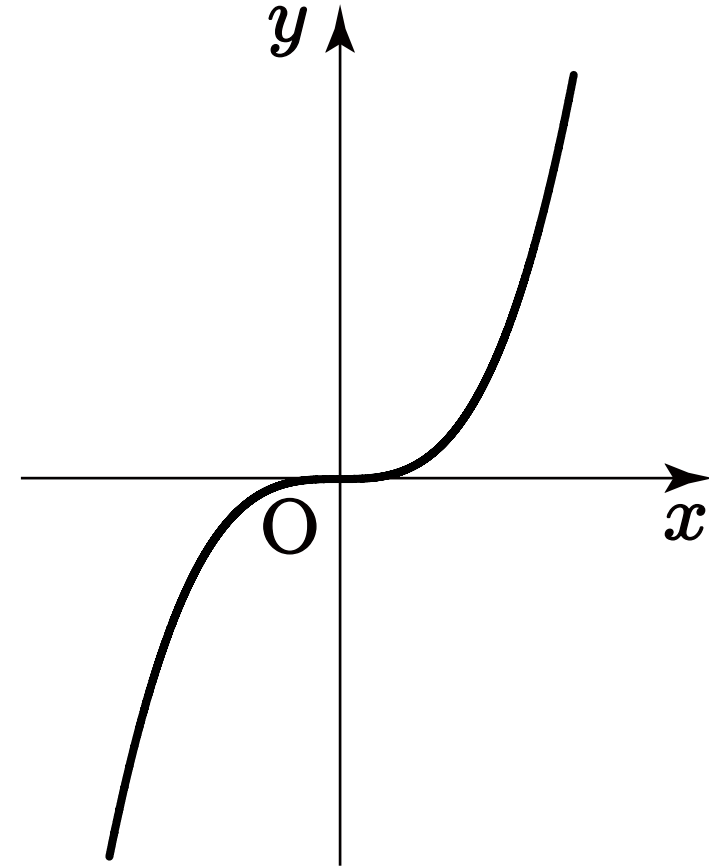
負から正 に変われば, $x = a$ で $f(x)$ は **極小**



$f'(a)=0$ についての注意

$f'(a) = 0$ であっても, $f(x)$ は $x = a$ で極値をとるとは限らない.

たとえば, $f(x) = x^3$ では, $f'(0) = 0$ であるが, $f(x)$ はつねに増加するから, $f(0)$ は極値ではない.



教訓 このように, $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための十分条件でない! 極値を求めるには, $f'(x)$ の符号の変化を調べるのがよい.