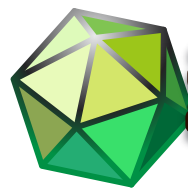


第4章 「微分法の応用」

5. 平均値の定理の理論的意義

hm3-4-5

(pdf ファイル)



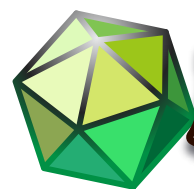
導関数の符号と関数の増減

関数 $f(x)$ の増減と導関数 $f'(x)$ の符号の間にある関係はよく知られている。

関数 $f(x)$ が、区間 I で微分可能のとき、

- (1) I でつねに $f'(x) > 0$ なら、 $f(x)$ は I で増加.
- (2) I でつねに $f'(x) < 0$ なら、 $f(x)$ は I で減少.
- (3) I でつねに $f'(x) = 0$ なら、 $f(x)$ は I で一定.

関数の増減と導関数のこの関係は、平均値の定理を用いて厳密に証明することができる。



原始関数の定数差の証明

与えられた関数 $f(x)$ に対して

$$\begin{cases} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

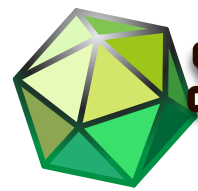
であるとする、

$$\begin{aligned} F_1'(x) - F_2'(x) &= \\ \{F_1(x) - F_2(x)\}' &= \end{aligned}$$

《平均値の定理》から導かれた上の定理から

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{定数}$$

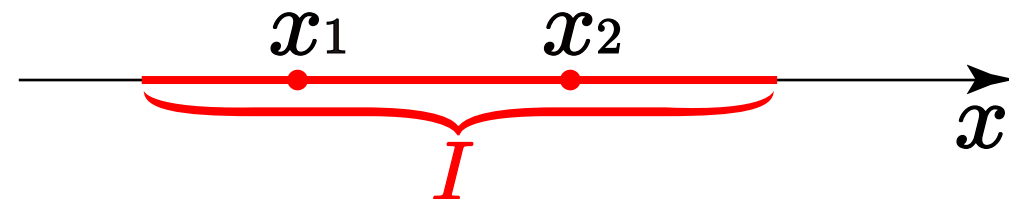
が証明できる！



平均値の定理に基づく増減の定理の証明

[(1) の証明] 区間 I に, $x_1 < x_2$ であるような 2 数 x_1, x_2 を任意にとる.

平均値の定理によって,



$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

を満たす c ($x_1 < c < x_2$) が存在する.

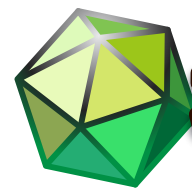
ここで, 区間 I でつねに $f'(x) > 0$ であるから,

$f'(c) > 0$ となり, また $x_2 - x_1 > 0$ であるから,

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ すなわち $f(x_1) < f(x_2)$ となる.

ゆえに, $f(x)$ は I で増加する.

(2), (3) も同様である. ■

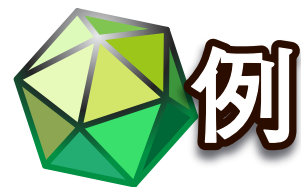


増減についての定理のより精密な定式化

関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a, b]$ で連続で、开区間 (a, b) で微分可能なとき、次のことが成り立つ.

- (1) (a, b) でつねに $f'(x) > 0$ なら,
[a, b] で $f(x)$ は増加する.
- (2) (a, b) でつねに $f'(x) < 0$ なら,
[a, b] で $f(x)$ は減少する.
- (3) (a, b) でつねに $f'(x) = 0$ なら,
[a, b] で $f(x)$ は一定である.

注 閉区間 $[a, b]$ で増加するなら、もちろんその部分区間である开区間 (a, b) でも増加する. 減少や一定の場合も同様.



関数 $g(x) = \sqrt{x}$ は,

区間 $x \geq 0$ で連続であり,

区間 $x > 0$ で微分可能である.

そして,

$$x > 0 \text{ に対して } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

ゆえに

$g(x)$ は 区間 $x \geq 0$ で増加する.

注 いわゆる増減表は, このようなデリケートな扱いを無意識に省略させる教育的トリックである.

x	0	...
$g'(x)$		+
$g(x)$		↗

例題

関数 $f(x) = x - \sin x$ は実数全体で増加することを示せ.

【解】 $f(x)$ は実数全体で微分可能であり,

$$f'(x) =$$

をみtas.

とくに, 区間 $(0, 2\pi)$ において $f'(x) > 0$ であるから, 区間 $[0, 2\pi]$ において増加する.

同様に, 任意の整数 n に対し, $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$ において増加する.

したがって, 実数全体で増加する. ■

