数学 III

第4章 「微分法の応用」

4. 平均値の定理についての注意事項

hm3-4-4

(pdf ファイル)

子均値の定理

曲線 y=f(x) 上の2点を結ぶ線分の傾きや接線の傾きという図形の言葉を使わずに表現すると、次のようになる.

関数 f(x) が

閉区間 [a, b] で連続,

開区間 (a, b) で微分可能

ならば、

$$rac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
 かつ $a < c < b \cdots (*)$

を満たすcが存在する.

平均値の定理

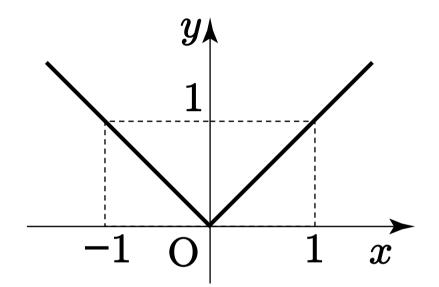
平均値の定理についての意意(1)

aとbの間に微分可能でない点が1つでもあると, (*)をみたすcが存在するとは言えない.

たとえば、関数
$$f(x) = |x|$$
 は、

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0$$

であるが,



$$f'(c) = 0$$
 かつ $-1 < c < 1$

を満たすcは存在しない. f(x) は,区間 [-1,1] で連続であるが,区間 (-1,1) 内の点 x=0 で微分可能ではないので,平均値の定理の仮定が満たされていないからである.

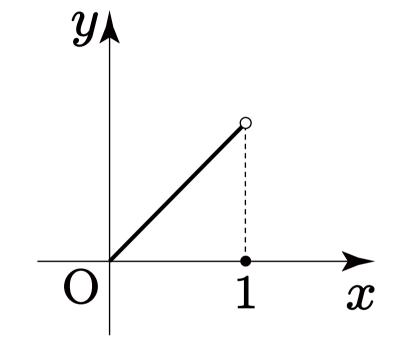
平均値の定理についての注意(2)

関数 f(x) の連続性は、区間の端点 x=a, x=bを含めて仮定する必要がある.

たとえば
$$f(x)=x \quad (0 \leqq x < 1) \ f(1)=0 \$$
とすると, $f(x)$ は,区間

0 < x < 1 で微分可能であ

るが.



$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} =$$

となる c は 0 < c < 1 に存在しない.

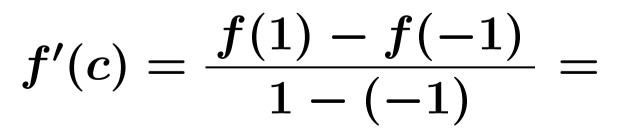
平均値の定理についての注意(3)

関数 f(x) の微分可能性は,区間の端点 x=a, x=b において仮定する必要はない.

たとえば,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

は, $x=\pm 1$ で微分不可能であるが,区間 $-1 \le x \le 1$ で連続,区間 -1 < x < 1 で微分可能であるので



となるcが存在する.

