

第4章 「微分法の応用」

24. テイラーの定理から
テイラー展開へ

hm3-4-24

(pdf ファイル)



【発展】 Taylor の定理 (一般)

Taylor の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で n 回微分可能であるとき,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる c ($a < c < b$) が存在する.

研究 $f(x)$ が何回でも微分可能であるとき, 便宜上 **無限回微分可能** であるという. さて, そのときは, 右辺はいくらでも続けることができるので, ...



【発展】 Taylor展開

無限回微分可能な関数 $f(x)$ に対して, 無限級数

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

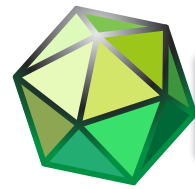
を, $f(x)$ の $x = a$ における **Taylor展開** という.

Taylor 展開が収束して, その元になった $f(x)$ と等しいとき, $f(x)$ は **Taylor 展開可能** であるという.

特に, $a = 0$ のときは,

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

となる. この無限級数が収束して, $f(x)$ と等しいとき, この無限級数を $f(x)$ の **べき級数展開** という.



自明なべき級数展開

多項式で表される関数, たとえば,

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

については

$$f'(x) = \quad, \quad f''(x) =$$

$$f'''(x) = \quad, \quad f^{(n)}(x) = \quad (n \geq 4)$$

$$f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \\ =$$

また,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ =$$