数学 III

第４章　「微分法の応用」

23. テイラーの定理

hm3-4-23

(pdf ファイル)

平均値の定理

関数 $f(x)$ が

閉区間 $[a,\ b]$ で連続,

閉区間 $(a,\ b)$ で微分可能

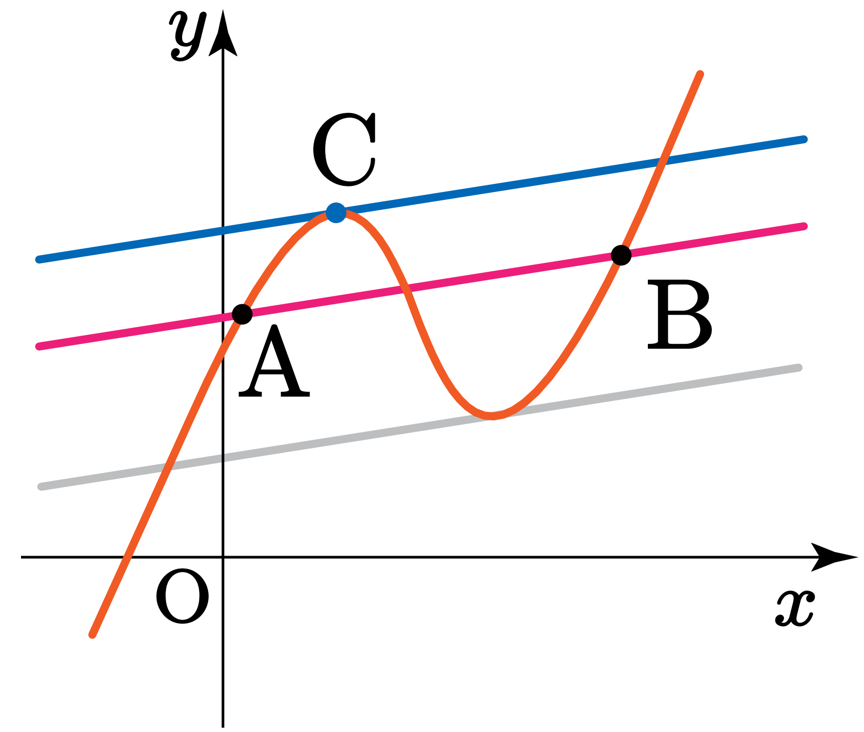
ならば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

かつ

$$a<c<b$$

を満たす c が存在する.



【発展】平均値の定理の拡張

Taylorの定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で2回微分可能であるとき，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

となる c $(a < c < b)$ が存在する．

証明　与えられた関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k(b-x)^2$$

とおくと

$$F(b) = 0$$

であり，また，定数 k を $F(a) = 0$ を満たすように決めることができる．

$$\begin{cases} F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k(b-x)^2 \\ F(a) = F(b) = 0 \end{cases}$$

となる関数 $F(x)$ に，区間 $[a,\ b]$ でロルの定理を適用すると

$$F'(x) =$$

より，$F'(c) = 0$ となる $c\ (a < c < b)$ は

$$-f''(c)(b-c) + 2k(b-c) = 0$$

$$\therefore\quad k = \frac{1}{2}f''(c)$$

を満たす．$F(a) = 0$ であるから

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 \ \blacksquare$$

【発展】 Taylorの定理（第二の拡張）

Taylorの定理

関数$f(x)$が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間(a,b)で3回微分可能であるとき，

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3$$

を満たすc $(a<c<b)$ が存在する.

証明の方針

$$F(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-\frac{f''(x)}{2}(b-x)^2-k(b-x)^3$$

に対し，定数kを $F(a)=0$ が成り立つように定め，ロルの定理を用いる.