数学 III

第４章　「微分法の応用」

22. いわゆるロピュタルの法則

hm3-4-22

(pdf ファイル)

EDUPA

【発展】Cauchyの平均値の定理

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能，$g(b) - g(a) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ のとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{かつ} \quad a < c < b$$

となる c が存在する。

注意 通常の平均値の定理から，

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad \text{かつ} \quad a < c < b$$

$$g(b) - g(a) = (b - a) g'(c) \quad \text{かつ} \quad a < c < b$$

のそれぞれを満たす c の存在は，自明である．しかし，これから上の定理を導くことはできない！ なぜか？

【発展】Cauchyの平均値の応用

関数$f(x), g(x)$ がともに閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能，$g(b)-g(a) \neq 0, g'(x) \neq 0$ のとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{かつ} \quad a < c < b$$

となる c が存在することから，開区間 (a, b) 内の任意のx に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{かつ} \quad a < \xi < x$$

となるξ が存在する.

ここで $x \to a$ とすると $\xi \to a$ である．これから，

$f(a) = g(a) = 0$ のときは次の規則が導かれる.

【発展】 l' Hôpitalの規則

関数$f(x), g(x)$ がともに微分可能で,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$$

で, かつ, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは,

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} =$