数学 III

第４章　「微分法の応用」

20. ロルの定理と平均値の定理

hm3-4-20

(pdf ファイル)

EDUPA

微分法の応用　学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
  平均値の定理の証明

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
  (増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
  (速度，加速度，速さ)

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
  (積分方程式，微分方程式)

平均値の定理

関数 $f(x)$ が

閉区間 $[a,\ b]$ で連続,

開区間 $(a,\ b)$ で微分可能

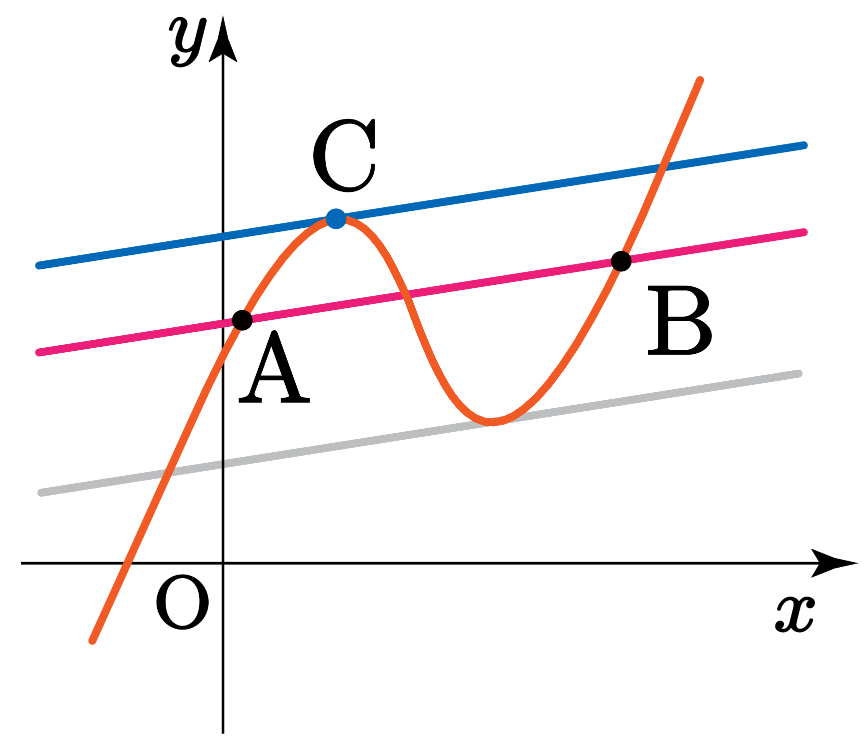
ならば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

かつ

$$a<c<b$$

を満たす c が存在する.



【発展】ロルの定理

平均値の定理の特殊な場合として次の定理がある.

ロルの定理

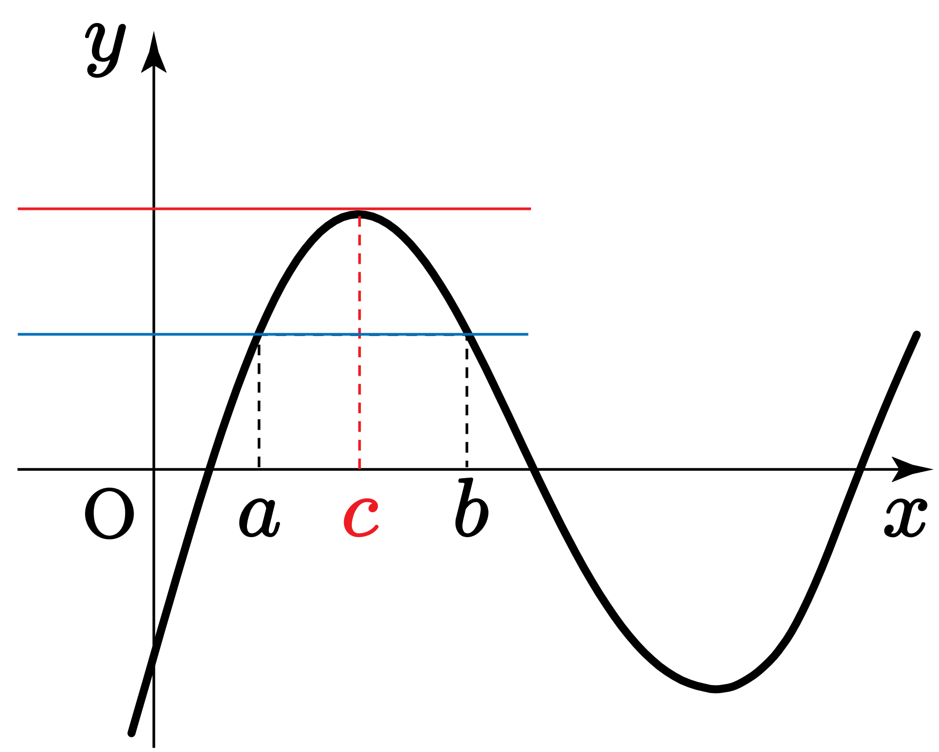
関数$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能，$f(a)=f(b)$ であるとき，

$$f'(c)=0 \quad \text{かつ} \quad a<c<b$$

となる c が存在する.

これは平均値の定理において，$f(a)=f(b)$ の場合である，という意味で平均値の定理の特殊な場合である.

ロルの定理の直観的理解



Michel Rolle (1652-1719)

***"Démonstration d'une Méthode pour resoudre les Egalitez de tous les degrez"*, 1681**

【発展】平均値の定理の導出

ロルの定理が証明されていると，それから，平均値の定理が証明できる．

実際，与えられた関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能であれば，これに対して

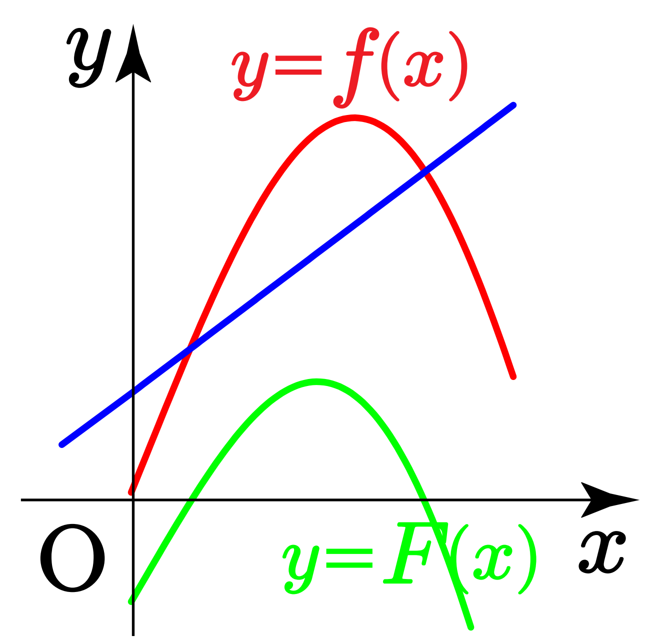
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

と定めると，関数 $F(x)$ に対して，ロルの定理の仮定が満たされる。

他方，ロルの定理の結論

$F'(c) = 0$ かつ $a < c < b$

は，まさに平均値の定理の結論を意味する．■



【発展】ロルの定理⟺平均値の定理

同値なので，片方は根本的に別の方法で証明しなければならない．そこで，より基本的なロルの定理を証明する．

与えられた関数 $f(x)$ が $f(a)=f(b)=0$ を満たす場合についてロルの定理を証明すれば十分である．

閉区間 $[a,b]$ で $f(x)=0$ のときは，証明すべき結論は明らかである．そこで，それ以外の場合を考える．

その場合には，開区間(a,b) に

i) $f(c)>0$ の最大値$f(c)$がある

ii) $f(c)<0$ の最小値$f(c)$がある

のいずれか少なくとも一つが成り立つ．

正の最大値がある場合

最大値の意味から $x=c$ の近傍において，$f(x) \leqq f(c)$

$$x < c \text{ なら} \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0$$

また，

$$x > c \text{ なら} \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0$$

微分可能性から，$f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$ ∎

負の最小値がある場合も同様である．