数学 III

第４章　「微分法の応用」

2. だ円の接線

hm3-4-2

(pdf ファイル)

EDUPA

例題

a, b を正の定数とするとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めよ.

【解】与えられて方程式の両辺を x で微分すると

よって，　　　　　のとき

ゆえに，$y_1 \neq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

より美しい形へ

両辺に $\dfrac{y_1}{b^2}$ をかけて変形すると

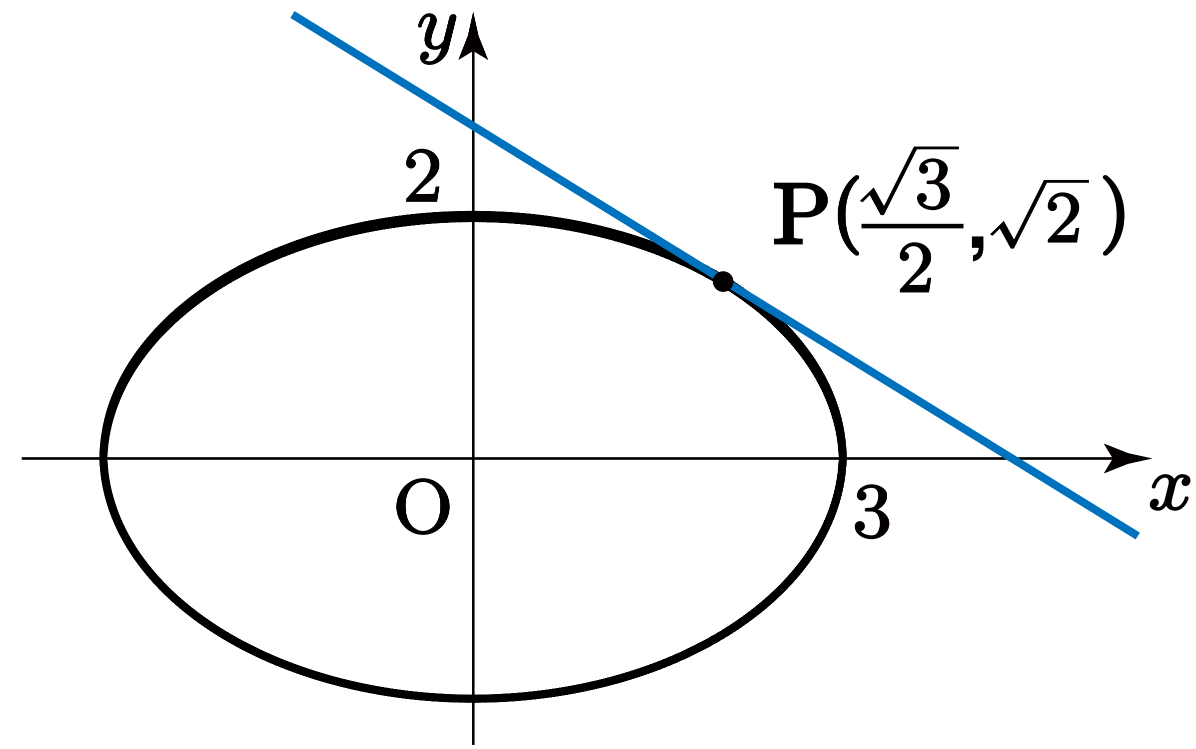
ここで，点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円上の点であるから，上式の右辺は　　に等しいので接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1 \quad \cdots (*)$$

また，$y_1=0$ のとき，点Pの座標は $(a,\ 0)$，または$(-a,\ 0)$ であり，これらの点における接線は，それぞれ $x=a$，$x=-a$ である．これらは，$(*)$に $x_1=a$，$y_1=0$，および $x_1=-a$，$y_1=0$ を代入したものであるから，$y_1=0$ のときにも，接線の方程式は $(*)$ で表される．

接線の公式の適用例

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ における接線を l とすると，l の方程式は



楕円の接線に対するもう一つのアプローチ

　媒介変数表示 $x = 3\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$ が定める曲線に対し，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\right)$ における接線 l の方程式を求めよう.

$$\frac{dx}{d\theta} = \qquad\qquad \frac{dy}{d\theta} =$$

であるから，

$$\frac{dy}{dx} = \qquad\qquad \therefore\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} =$$

　よって，l の方程式は

$$y =$$

すなわち