

第4章 「微分法の応用」

19. 微分と近似式

hm3-4-19

(pdf ファイル)



微分法の応用 学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
平均値の定理の証明

- 変曲点, 漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
(速度, 加速度, 速さ)

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
(増減, 極値, 凹凸,

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
(積分方程式, 微分方程式)

近似式

微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ から,
 $f'(a)$ が存在するときは, $x \doteq a$ のとき,

$$f'(a) \doteq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

という近似式が成り立つ.

これは次のように書き換えることができる.

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$$

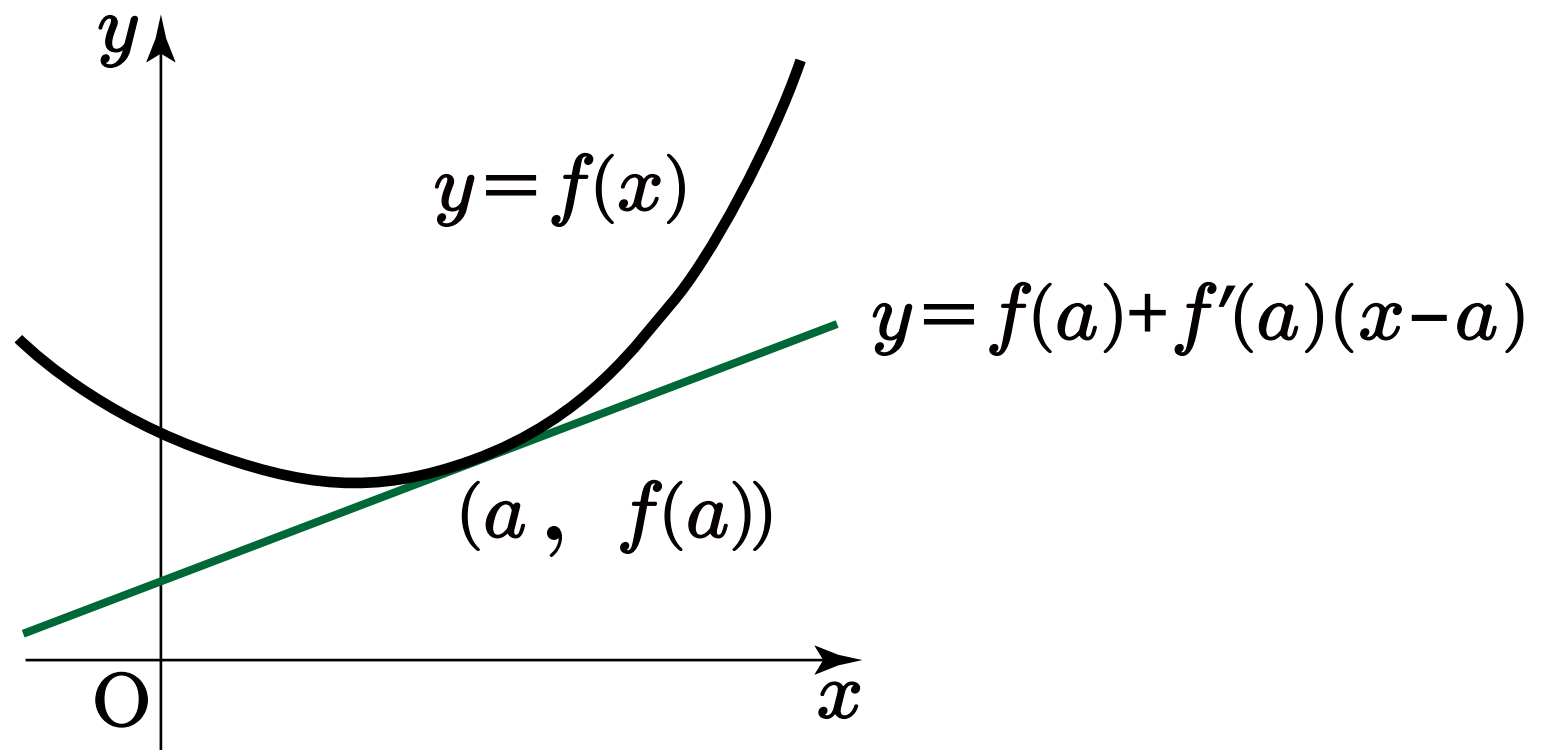
これを, $f(x)$ の **第1次近似** または, 線型近似という.

近似式の図形的意味

方程式 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ は、曲線 $y = f(x)$ の、点 $(a, f(a))$ における接線を表すので、この近似式は、

関数のグラフである曲線が接点の近傍では、
その接線によって近似されること

を意味する。



近似の実用性

$x \doteq 1$ での $f(x) = \log x$ の近似式を作ろう.

$f(1) =$, $f'(1) =$ であるから,

$$\log x \doteq$$

たとえば, $x = 1.01$ とすると, $\log 1.01 \doteq$ と
なる.

実際の値は,

$$\log 1.01 = 0.00995033 \dots$$

であるので, 誤差は真の値の 0.5% 以下である.

平面上の運動の近似

平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が, t の関数として, $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表され, $f(t)$, $g(t)$ が $t = 0$ で微分可能であるとする, $t \doteq 0$ のとき,

$f(t) \doteq f(0) + f'(0)t$, $g(t) \doteq g(0) + g'(0)t$ が成り立つ. そこで

$x = f(0) + f'(0)t$, $y = g(0) + g'(0)t$ で与えられる運動を考えよう. $f'(0) \neq 0$ とすると, この運動の軌道は $y - g(0) = \frac{g'(0)}{f'(0)}(x - f(0))$ のように表される.

これは, P の軌道を近似する直線, すなわち接線である.

