数学 III

第４章 「微分法の応用」

14. 指数関数の発散速度

hm3-4-14

(pdf ファイル)

EDUPA

【発展】$x \to \infty$ のときの e^x の発散速度

$x > 0$ のとき $e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ であること

から,

$$x > 0 \quad \text{のとき} \quad e^x > \frac{1}{2}x^2.$$

これから,

$x > 0$ のとき

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \qquad = \infty$ であるので,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} =$ 　　　　したがって, また, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} =$

考察 $x \to \infty$ のときの e^x の発散速度は, x の発散速度と比べてはるかに早い.

【発展】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=?$

$$\frac{x^2}{e^x}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}\cdot 4=4\left(\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2$$

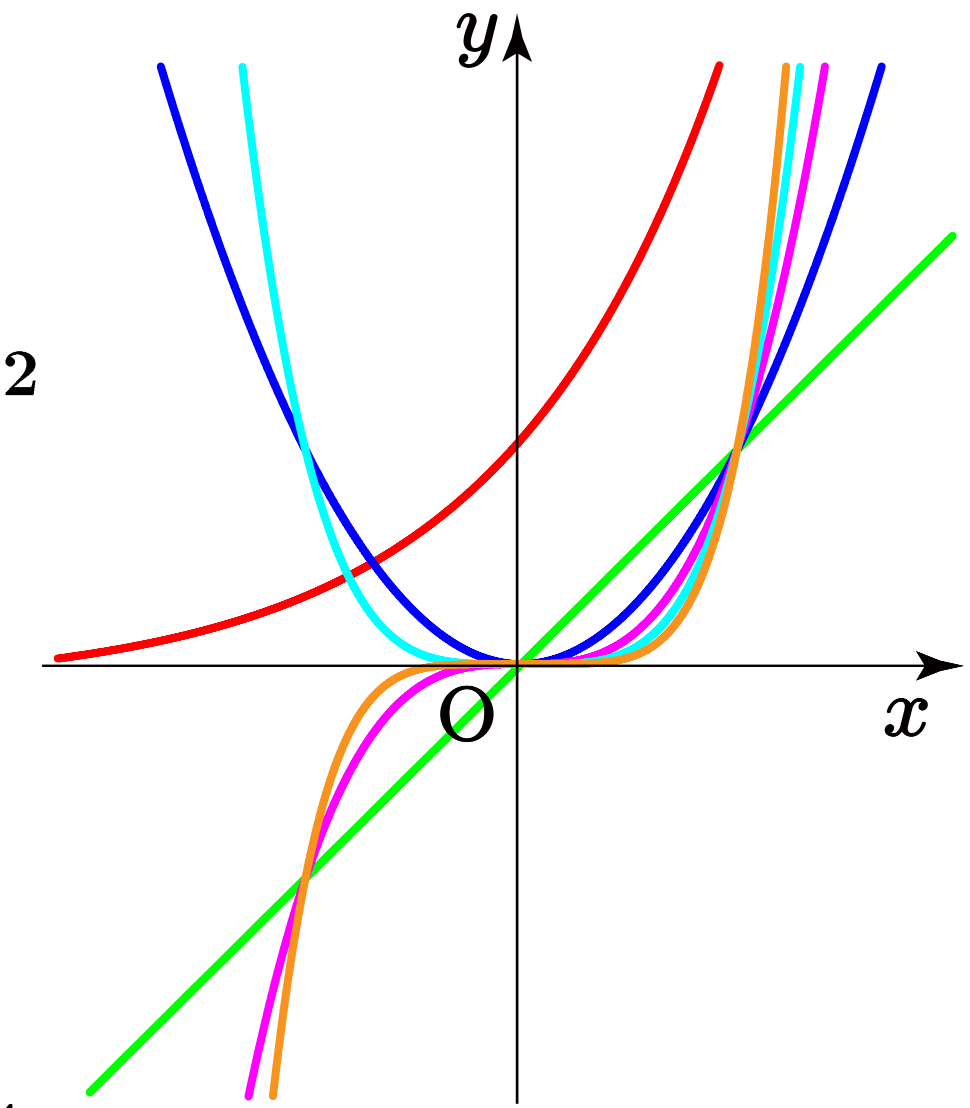
$t=\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\dfrac{x^2}{e^x}=4\left(\dfrac{t}{e^t}\right)^2$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^x}=0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{t\to\infty}4\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$$

同様に，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}=0,\ \cdots$$



教訓 $x\to\infty$ のときの e^x の発散速度は桁違い！