数学 III

第４章　「微分法の応用」

13. 微分の不等式への応用

hm3-4-13

(pdf ファイル)

微分法の応用　学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
  平均値の定理の証明

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
  (増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
  (速度，加速度，速さ)

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
  (積分方程式，微分方程式)

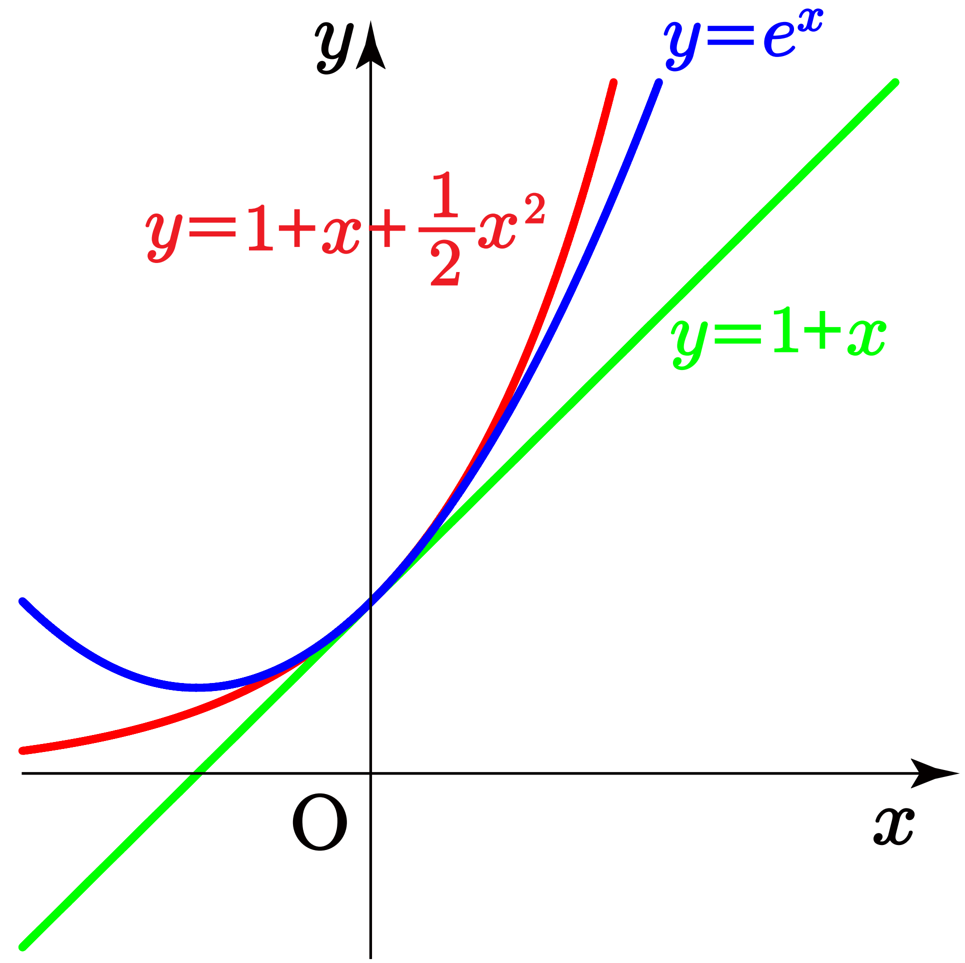
不等式の証明

例題

$x > 0$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

(1)　$e^x > 1 + x$

(2)　$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$



【解】(1)　$f(x)=e^x-1-x$ とおいて，$x>0$ のとき $f(x)>0$ となることを示す．

$f'(x)=$　　　　　　は，区間　　　　で $f'(x)>0$ を満たすから，$f(x)$ は 区間　　　　　で増加する．よって特に，$x>0 \Longrightarrow f(x)>f(0)$ ．

他方，$f(0)=0$ であるから，$f(x)>0\ (x>0)$ が成り立つ．∎

(2)　$g(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2$ とおくと，
$g'(x)=e^x-1-x=f(x)$　であるので，区間 $x>0$　で　$g'(x)>0$　であるから，$g(x)$　は区間 $x \geqq 0$　で増加する．　また $g(0)=0$　であるから，$g(x)>0\ (x>0)$ が成り立つ．∎