数学 III

第４章　「微分法の応用」

12. 最大・最小、値域

---

hm3-4-12

(pdf ファイル)

EDuPA

微分法の応用　学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- ２次導関数の符号と関数のグラフ

関数のグラフ
平均値の定理の証明

変曲点，漸近線)

- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理

(速度，加速度，速さ)

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ

(増減，極値，凹凸，

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式

(積分方程式，微分方程式)

最大・最小

関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sin x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値と最小値を求めよう．$f'(x) =$ _____ であるから，$x =$ _____ のとき $f'(x) = 0$ となる．そして，$f(x)$ の増減は，次の表のようになる．

x	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	2π
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$							

よって，$f(x)$ は，$x =$ _____ で最大値 _____ をとり，$x =$ _____ で最小値 _____ をとる．

値域を求める

関数 $y = xe^{-x}$ $(x \geqq 0)$ の値域を求めよう.

$y' =$ であるから,
$y' = 0$ となるのは, $x =$ のときである. そして, y の増減は, 右の表のようになる.

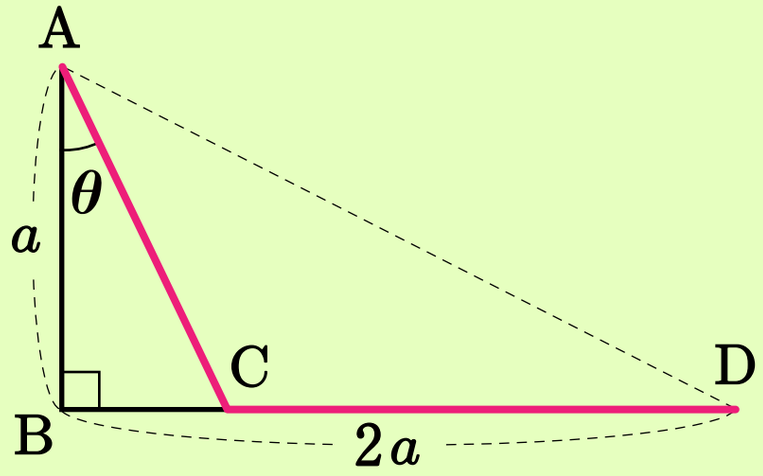
x		$\cdots$		$\cdots$
y'				
y				

また, 任意の $x \geqq 1$ に対して, $y > 0$ である.

よって, y の値域は, の実数 y 全体である.

例題

図のような折れ線状の道がある．$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BD}=2a$，$\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とし，AC 上を速さ v で，CD 上を速さ $2v$ で進むとして，A から D まで行くのに要する時間 T を最小にする θ を求めよ．



ただし，C は線分 BD 上 (両端を含む) にあるものとし，v は正の定数であり，また，後戻りせずに進むものとする．

【解】AC＝　　，CD＝　　であるから，

$$T = \frac{\mathrm{AC}}{v} + \frac{\mathrm{CD}}{2v} =$$

$$\frac{dT}{d\theta} =$$

$\angle \mathrm{BAD} = \alpha$ とおくと，θ の変域は $0 < \theta < \alpha$ であるが，$\tan\alpha = 2$ であるから，$\dfrac{\pi}{6} < \alpha$ であるので，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，T は最小となる．

θ	0	$\cdots$		$\cdots$	α
$\dfrac{dT}{d\theta}$			0		
T					