数学 III

第４章　「微分法の応用」

11. 極値の十分条件

hm3-4-11

(pdf ファイル)

EDUPA

微分法の応用　学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ

  平均値の定理の証明

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ

  (増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理

  (速度，加速度，速さ)

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式

  (積分方程式，微分方程式)

極値の判定の十分条件

2次導関数と極大・極小

関数 $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ が $x=a$ で連続であるとき,

$\boxed{\mathrm{I}}$ $f'(a)=0, f''(a)>0$ なら，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる.

$\boxed{\mathrm{II}}$ $f'(a)=0, f''(a)<0$ なら，$f(x)$ は $x=a$ で極大値をとる.

注意 “ $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ ” は極小値の必要条件ではない！　同様に “ $f'(a)=0,\ f''(a)<0$ ” は極大値の必要条件ではない!

極値の判定の十分性の証明

($\boxed{\text{I}}$ の証明) $f''(x)$ は $x = a$ で連続で，$f''(a) > 0$ であるから，$x = a$ の近くで $f''(x) > 0$ となる．

したがって，$f'(x)$ は $x = a$ の近くで増加する．

ところが，$f'(a) = 0$ であるから，$f'(x)$ は $x = a$ において，負から正に符号を変える．

したがって，$f(x)$ は $x = a$ で極小となる．

$\boxed{\text{II}}$ の証明も同様である．■

例

$f(x) = x^3 - 3x$ の極値を調べよう.

$f'(x) =$ 　　　　　　　 は $x =$ 　　　 で 0 となり，また

$f''(x) =$ 　　　　　　 であるから,

$f'(1) = 0,\ f''(1) > 0,$ 　よって $x = 1$ で極　　値をとる

$f'(-1) = 0,\ f''(-1) < 0,$ 　よって $x = -1$ で極　　値をとる