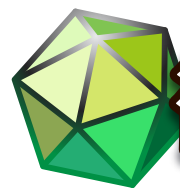


第4章 「微分法の応用」

11. 極値の十分条件

hm3-4-11

(pdf ファイル)



微分法の応用 学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
平均値の定理の証明

- 変曲点, 漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
(速度, 加速度, 速さ)

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
(増減, 極値, 凹凸,

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
(積分方程式, 微分方程式)

極値の判定の十分条件

2次導関数と極大・極小

関数 $f(x)$ の2次導関数 $f''(x)$ が $x = a$ で連続であるとき,

I $f'(a) = 0, f''(a) > 0$ なら, $f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる.

II $f'(a) = 0, f''(a) < 0$ なら, $f(x)$ は $x = a$ で極大値をとる.

注意 “ $f'(a) = 0, f''(a) > 0$ ” は極小値の必要条件ではない! 同様に “ $f'(a) = 0, f''(a) < 0$ ” は極大値の必要条件ではない

極値の判定の十分性の証明

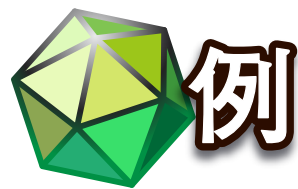
(**I** の証明) $f''(x)$ は $x = a$ で連続で, $f''(a) > 0$ であるから, $x = a$ の近くで $f''(x) > 0$ となる.

したがって, $f'(x)$ は $x = a$ の近くで増加する.

ところが, $f'(a) = 0$ であるから, $f'(x)$ は $x = a$ において, 負から正に符号を変える.

したがって, $f(x)$ は $x = a$ で極小となる.

II の証明も同様である. ■



$f(x) = x^3 - 3x$ の極値を調べよう.

$f'(x) =$ は $x =$ で 0 となり, また

$f''(x) =$ であるから,

$f'(1) = 0, f''(1) > 0,$ よって $x = 1$ で極 値
をとる

$f'(-1) = 0, f''(-1) < 0,$ よって $x = -1$ で
極 値をとる