

第4章 「微分法の応用」

10. 増減凹凸表

hm3-4-10

(pdf ファイル)



微分法の応用 学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
平均値の定理の証明

- 変曲点, 漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
(速度, 加速度, 速さ)

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
(増減, 極値, 凹凸,

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
(積分方程式, 微分方程式)

例題

$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の増減, 凹凸を調べよ,

【解】 $y' =$

$y'' =$

$x =$ のとき $y' = 0$ となり, $x =$ のとき $y'' = 0$ となる. そこで, y', y'' の符号を調べることによって, 増減と凹凸の表が得られる.

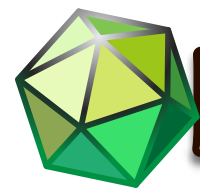
増減凹凸表

より

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad y' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad y'' = (x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

x	...		...		...		...
y'							
y''							
y							


 上の表で, $\nearrow$ はグラフが下に凸で増加する状態にあることを, $\searrow$ は上に凸で増加する状態にあることを表す. $\swarrow$ や $\nwarrow$ も同様である.

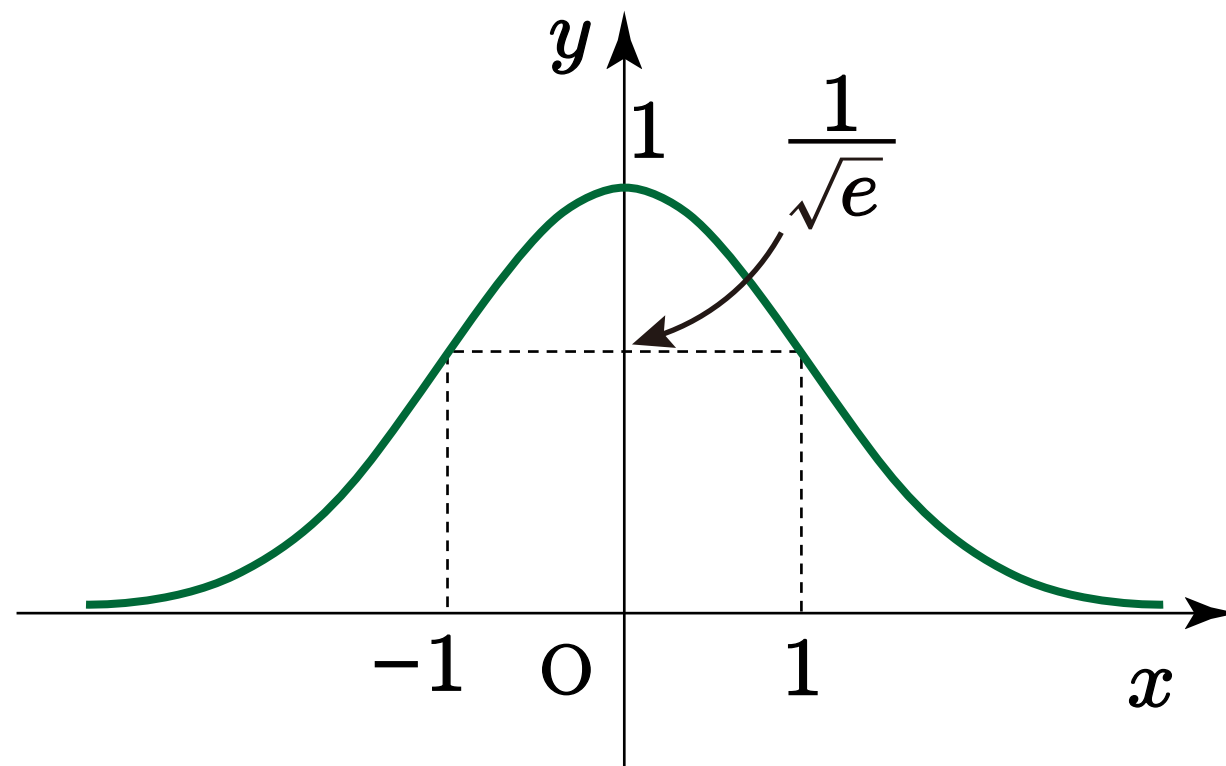


関数の増減表とグラフの大域的振る舞い

関数 $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の増減表に加え, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ であることから, グラフは x 軸を漸近線にもつことがわかる.

また, グラフは y 軸対称である.

よって, $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ のグラフは, 下図のようになる.



例題

関数 $y = x + \frac{1}{x}$ の増減, 凹凸, 漸近線を調べ,
グラフの概形をかけ.

【解】 $y' =$ $y'' =$
よって, $x =$ のとき $y' = 0$ となる. そこで,
 y', y'' の符号を調べると, 次の増減表のようになる.

x	...		...		...		...
y'							
y''							
y							



関数のグラフの大域的振る舞い

$\lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$ であるから, 軸
を漸近線にもち, さらに,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

であるから, 直線 を
漸近線にもつ.

よって, グラフは右図のよ
うになる.

