数学 III

第４章　「微分法の応用」

1. 接線・法線

hm3-4-1

(pdf ファイル)

EDUPA

微分法の応用　学習マップ

応用のための基礎理論

- 平均値の定理
- 導関数の符号と関数の値の変化の関係
- 2次導関数の符号と関数のグラフ
  平均値の定理の証明

応用

- 接線・法線
- 関数のグラフ
  (増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線)
- 最大最小問題
- 不等式の証明
- 方程式の実数解
- 運動の数理
  (速度，加速度，速さ)

さらなる応用

- 無限級数展開
- 関数方程式
  (積分方程式，微分方程式)

接線 (tangent) の方程式

　関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における **接線** の傾きを表す．

　したがって，接線の方程式は次のようになる．

　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は，

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

注　接線の方程式としてより実用的なのは次の形：

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

例

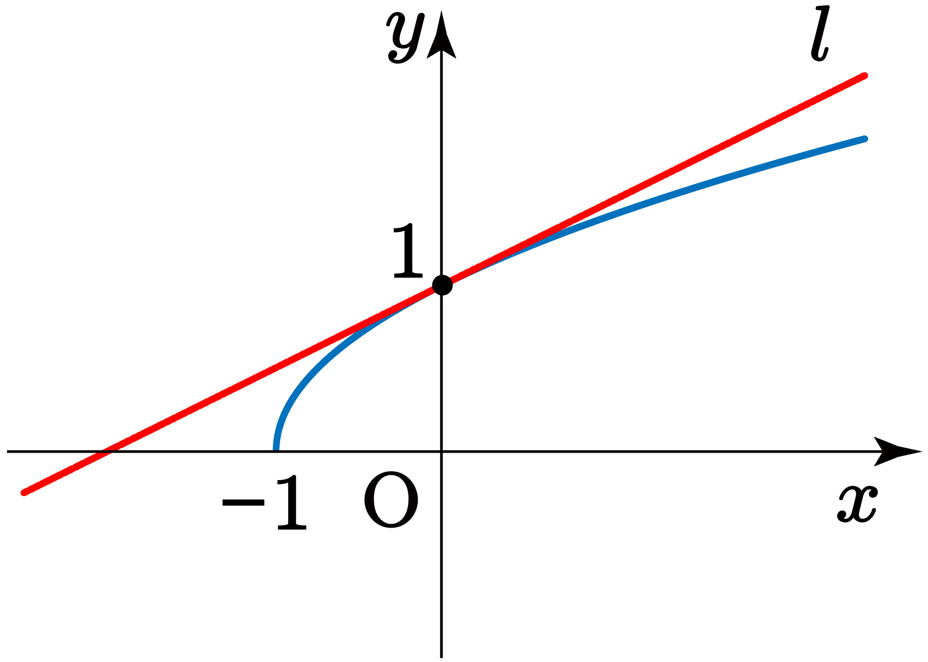
曲線 $y = \sqrt{x+1}$ 上の点 $(0, 1)$ における接線 l の方程式を求めよう.

$$y' =$$

より, l の傾きは, $y'|_{x=0} =$

であるから, l の方程式は,

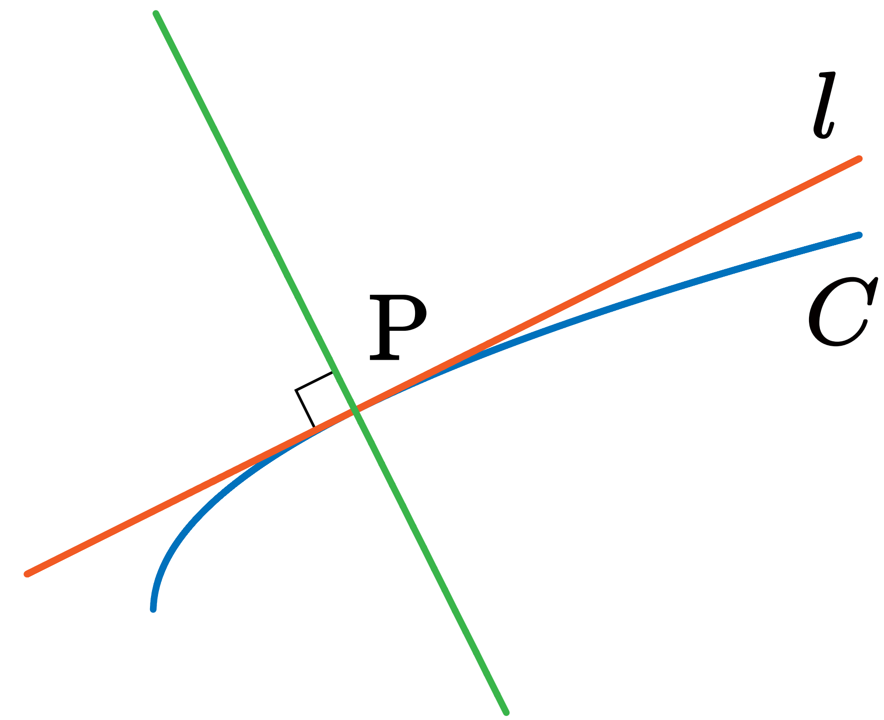
$$y =$$



注 記号 $y'|_{x=\alpha}$ は, $x = \alpha$ における y' の値を表す記号である. $y = f(x)$ とすれば, $f'(\alpha)$ に相当する.

法線 (normal) の方程式

　曲線 C 上の点 P を通り，P における C の接線と直交する直線を，点 P における C の **法線** という．



例 曲線 $y=\sqrt{x+1}$ 上の点 (0，1) における接線の傾きは，$y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ であるから，法線の傾きは　　 である．

　したがって，点 (0，1) における法線の方程式は

例題

原点から曲線 $y = \log x$ にひいた接線 l の方程式を求めよ.

【解】 $y' =$ 　　　であるから，曲線上の点 $(t,$ 　　　　$)$ における接線の方程式は,

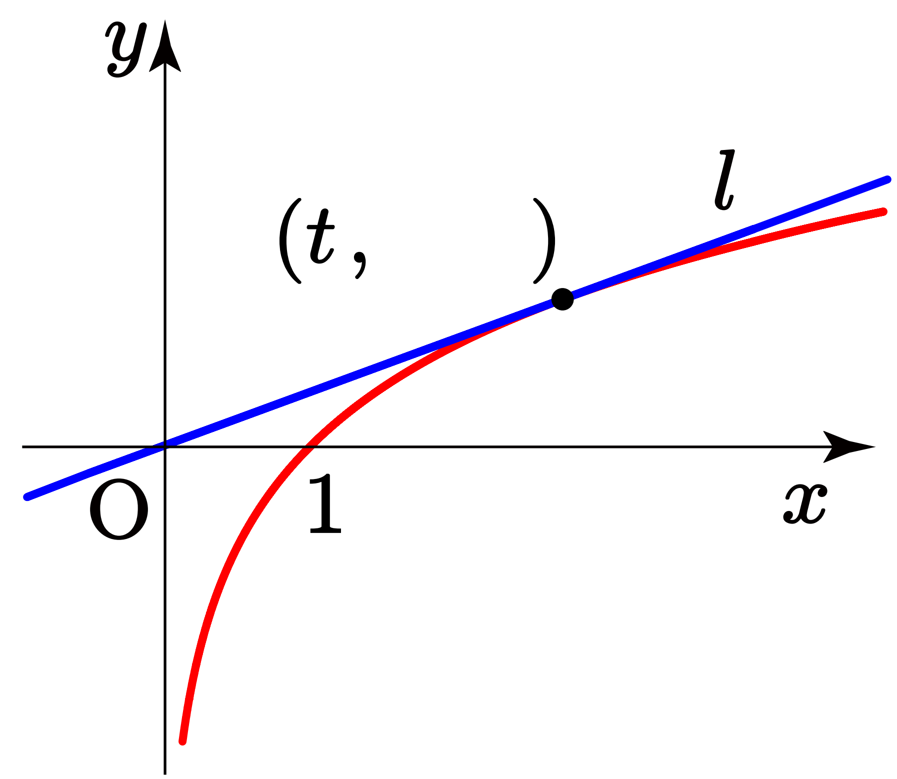
$$y = \qquad\qquad\qquad \cdots (*)$$

これが原点を通る条件は

$$0 = -1 + \log t$$

よって

これを$(*)$に代入して,



急所：発想の転換

原点から曲線に接線をひく.（原点を通る直線の中で，曲線の接線になるものを探す.）

$\Rightarrow$

点 $(t, \log t)$ で接線をひいたら原点を通った.（接線のうちで，原点を通るものを探す.）