数学 III

第３章　「微分法」

9. 三角関数の微分

hm3-3-9

(pdf ファイル)

EDUPA

微分法の学習マップ

微分の理論

- **微分の基礎概念**
  微分係数，導関数
  微分可能性，高次導関数

- **微分の基本公式**
  (1) 微分の線型性
  (2) 積の微分法
  (3) 商の微分法
  (4) 合成関数の微分法
  (5) 逆関数の微分法
  (6) 対数微分法
  (7) 陰関数の微分法
  (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- **べき乗関数**
  (1) $(x^n)'$ (n：負でない整数)
  (2) $(x^n)'$ (n：負の整数)
  (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ (m：正の整数)
  (4) $(x^r)'$ (r：有理数)
  (5) $(x^\alpha)'$ (α：実数)

- **三角関数**
  $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$

- **対数関数・指数関数**
  $(\log_a x)', (a^x)'$

三角関数 $\sin x$ の導関数

$\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を利用すると，正弦関数 $\sin x$ の導関数が求められる．

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} \\
&=
\end{aligned}
$$

余弦関数 $\cos x$ の導関数

$\cos \leftrightarrow \sin$の変換公式

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

と，合成関数の微分法により

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}'$$

正接関数 $\tan x$ の導関数

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから，商の微分法により

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

三角関数の導関数(まとめ)

$\boxed{1}$ $(\sin x)' = \cos x$ $\boxed{2}$ $(\cos x)' = -\sin x$

$\boxed{3}$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

注意 $\boxed{1}$ から $\boxed{2}$ が，そして $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ から $\boxed{3}$ が証明された．その意味では，$\boxed{1}$ が最も基本的であり，その証明において $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ という基本定理が使われていることに注目しよう．

ただし，$\boxed{2}$ を $\boxed{1}$ のように直接導くこともできる．

三角関数で組み立てられる関数の微分の例

◪ $(\sin x \cos x)' =$

◪ $(\sin 3x)' =$

◪ $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' =$