数学 III

第３章　「微分法」

6. 微分の基本公式（５）
合成関数の微分法

---

hm3-3-6

（pdf ファイル）

EDUPA

微分法の学習マップ

微分の理論

- **微分の基礎概念**
  微分係数，導関数
  微分可能性，高次導関数

- **微分の基本公式**
  (1) 微分の線型性
  (2) 積の微分法
  (3) 商の微分法
  (4) 合成関数の微分法
  (5) 逆関数の微分法
  (6) 対数微分法
  (7) 陰関数の微分法
  (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- **べき乗関数**
  (1) $(x^n)'$ $(n$: 負でない整数$)$
  (2) $(x^n)'$ $(n$: 負の整数$)$
  (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ $(m$: 正の整数$)$
  (4) $(x^r)'$ $(r$: 有理数$)$
  (5) $(x^\alpha)'$ $(\alpha$: 実数$)$

- **三角関数**
  $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$

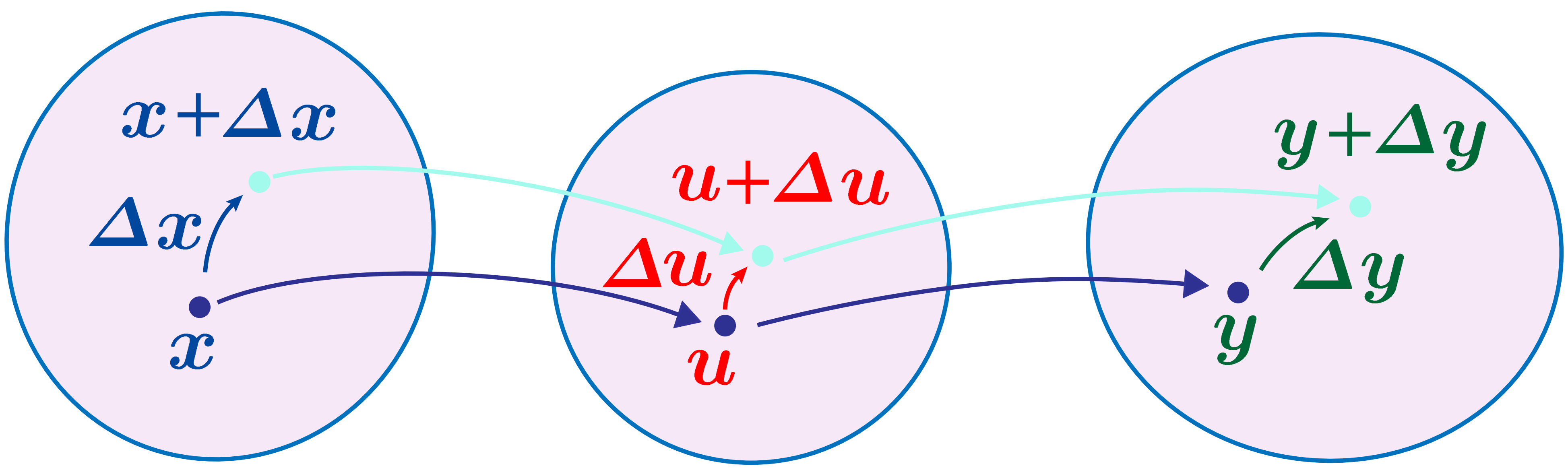
- **対数関数・指数関数**
  $(\log_a x)', (a^x)'$

合成関数の微分法

$y=f(u)$, $u=g(x)$ がそれぞれ u, x の微分可能な関数であるとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で，次の公式が成り立つ．

合成関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ から

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで，$g(x)$ の連続性により，$\Delta x \to 0$ のとき，

$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \to 0$ となるから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \blacksquare$$

合成関数の微分法の応用例

◪ $y = (x^2 + 3x + 1)^5$

$u =$ とおくと，$y =$ となるから，

$$\frac{dy}{du} = \qquad\qquad \frac{du}{dx} =$$

よって，

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} =$$

合成関数の微分公式のもう一つの表現

$$y = f(u), \qquad u = g(x)$$

と表されているならば，合成関数の微分法の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

において，

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)), \qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

であるから，上の公式は次のように表すこともできる．

合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\, g'(x)$$

合成関数の微分法の威力

$y=(x^2+1)^3$ を次の2つの方法で微分してみよう.

- まず，$(x^2+1)^3$ を展開する.

  $y=(x^2+1)^3=$ より,

  $y'=$

- 合成関数の微分法を利用する.

  $u=$ とおくと，$y=$ であり

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=$$

頻繁に使われる合成関数の微分の基礎公式

　一般に，n が整数のとき，関数 $y = \{f(x)\}^n$ の導関数は次のように計算できる.

$$(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

　たとえば,

◪ $y = (x^2+1)^3 \Longrightarrow y' =$

◪ $y = (x^3+3x^2+6x)^4$
$\Longrightarrow y' =$