数学 III

第３章　「微分法」

4. 微分の基本公式（３）
商の微分公式

hm3-3-4

(pdf ファイル)

EDUPA

微分法の学習マップ

微分の理論

- **微分の基礎概念**
  微分係数，導関数
  微分可能性，高次導関数

- **微分の基本公式**
  (1) 微分の線型性
  (2) 積の微分法
  (3) 商の微分法
  (4) 合成関数の微分法
  (5) 逆関数の微分法
  (6) 対数微分法
  (7) 陰関数の微分法
  (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- **べき乗関数**
  (1) $(x^n)'$ $(n$：負でない整数$)$
  (2) $(x^n)'$ $(n$：負の整数$)$
  (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ $(m$：正の整数$)$
  (4) $(x^r)'$ $(r$：有理数$)$
  (5) $(x^\alpha)'$ $(\alpha$：実数$)$

- **三角関数**
  $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$

- **対数関数・指数関数**
  $(\log_a x)', (a^x)'$

商の微分公式

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について，次の公式が成り立つ.

商の導関数

$\boxed{1}$ $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\boxed{2}$ $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

注 $\boxed{1}$ は $\boxed{2}$ の特殊な場合に過ぎない.
しかし，・・・

“$\boxed{1}$ $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ ”の証明

$y = \dfrac{1}{g(x)}$ とし，x の増分 $\Delta x = h$ に対する y の増分を Δy とすると

$$\Delta y = \qquad\qquad = -\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)g(x)}$$

両辺を $\Delta x = h$ で割ると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

したがって，$\Delta x = h \to 0$ のとき

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \qquad\qquad = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \blacksquare$$

“商の微分公式 $\boxed{2}$ ”の証明

公式 $\boxed{1}$ が証明されると積の微分公式を用いて，公式 $\boxed{2}$ が証明できる.

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$=$$

商の微分公式の応用例

◪ $$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' =$$

◪ $$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$$