数学 III

第３章　「微分法」

3. 微分の基本公式（２）
積の微分公式

hm3-3-3

（pdf ファイル）

微分法の学習マップ

微分の理論

- **微分の基礎概念**
  微分係数，導関数
  微分可能性，高次導関数

- **微分の基本公式**
  (1) 微分の線型性
  (2) 積の微分法
  (3) 商の微分法
  (4) 合成関数の微分法
  (5) 逆関数の微分法
  (6) 対数微分法
  (7) 陰関数の微分法
  (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- **べき乗関数**
  (1) $(x^n)'$ (n : 負でない整数)
  (2) $(x^n)'$ (n : 負の整数)
  (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ (m : 正の整数)
  (4) $(x^r)'$ (r : 有理数)
  (5) $(x^\alpha)'$ (α : 実数)

- **三角関数**
  $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$

- **対数関数・指数関数**
  $(\log_a x)', (a^x)'$

積の微分公式

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について，次の公式が成り立つ.

積の導関数

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

証明 $y = f(x)g(x)$ とし，x の増分 $\Delta x = h$ に対する y の増分を Δy とすると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

である.

注 ここで，$\Delta x = h \to 0$ の極限は，$\dfrac{0}{0}$ の不定形であるので，うまい変形の工夫が必要である.

$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)$の変形

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\
&= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) \\
&\qquad + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\
&= \{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) \\
&\qquad + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
$$

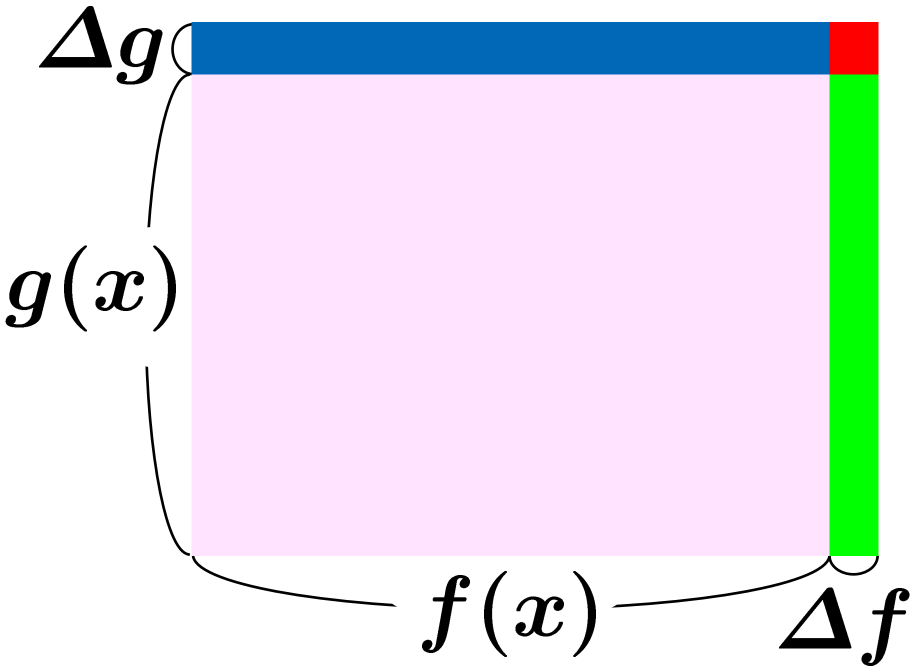
ゆえに, $y' = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\blacksquare$

積の微分公式の直観的意味

x の増分 Δx に対する $f(x)$ の増分，$g(x)$ の増分をそれぞれ，$\Delta f, \Delta g$ と表すと，$f(x)g(x)$ の増分

$$\begin{aligned}&(f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g)-f(x)g(x)\\&=f(x)\Delta g+g(x)\Delta f+\Delta f\cdot\Delta g\end{aligned}$$

において，Δx が微小のとき，
$f(x)\Delta g$，$g(x)\Delta f$，$\Delta f\Delta g$
はいずれも微小であるが，
$\Delta f\cdot\Delta g$ は，他の微小成分
より遥かに小さい．



積の微分法の応用例

◪ $\{(x^3-2)(x-1)\}'$

$=$

◪ $\{(2x+1)(x^2-x+3)\}'$

$=$