

第3章 「微分法」

2. 微分 可能性をめぐる
基本問題

hm3-3-2
(pdf ファイル)

微分法の学習マップ

微分の理論

- 微分の基礎概念
微分係数, 導関数
微分可能性, 高次導関数
- 微分の基本公式
 - (1) 微分の線型性
 - (2) 積の微分法
 - (3) 商の微分法
 - (4) 合成関数の微分法
 - (5) 逆関数の微分法
 - (6) 対数微分法
 - (7) 陰関数の微分法
 - (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- べき乗関数
 - (1) $(x^n)'$ (n : 負でない整数)
 - (2) $(x^n)'$ (n : 負の整数)
 - (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ (m : 正の整数)
 - (4) $(x^r)'$ (r : 有理数)
 - (5) $(x^\alpha)'$ (α : 実数)
- 三角関数
 $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$
- 対数関数・指数関数
 $(\log_a x)', (a^x)'$

“微分可能 $\Rightarrow$ 連続”

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能 ならば, 極限值

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \end{aligned}$$

$\therefore$

よって, $f(x)$ は $x = a$ で連続 である.



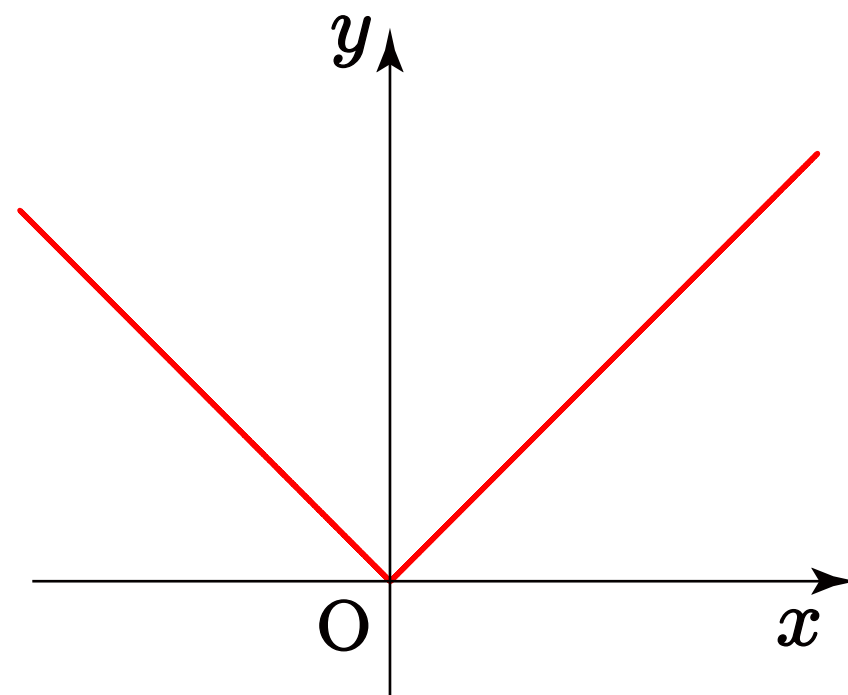
微分可能性と連続性の関係

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で連続である.

しかし、この逆は成り立たない. すなわち、関数が $x = a$ で連続であっても、 $x = a$ で微分可能になるとは限らない.

たとえば、関数 $f(x) = |x|$ は、 $x = 0$ で連続であるが、 $x = 0$ で微分可能ではない.



$f(x) = |x|$ の微分不能性

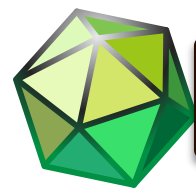
$f(x) = |x|$ は, $x = 0$ で微分不可能である. 実際,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

これら2つの $x = 0$ における片側極限值の値が一致しないので, $f'(0)$ は存在しない.

ゆえに, $f(x)$ は, $x = 0$ で微分不可能である.

注意 $f'(0)$ が存在しないことは, $x = 0$ に対応する点での接線が存在しないことを意味する.



【発展】微分不可能性と導関数の不連続性

$f(x) = |x|$ については

$$\begin{cases} x > 0 \text{ のときは, } f(x) = x & \therefore f'(x) = 1 \\ x < 0 \text{ のときは, } f(x) = -x & \therefore f'(x) = -1 \end{cases}$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f'(x) = -1$$

である.

しかし, これらによって, $x = 0$ における片側微分
係数

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

を代用することはただちにはできない.