数学 III

第３章　「微分法」

16. 媒介変数表示と導関数

hm3-3-16

(pdf ファイル)

EDUPA

微分法の学習マップ

微分の理論

- **微分の基礎概念**
  微分係数，導関数
  微分可能性，高次導関数

- **微分の基本公式**
  (1) 微分の線型性
  (2) 積の微分法
  (3) 商の微分法
  (4) 合成関数の微分法
  (5) 逆関数の微分法
  (6) 対数微分法
  (7) 陰関数の微分法
  (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- **べき乗関数**
  (1) $(x^n)'$ (n：負でない整数)
  (2) $(x^n)'$ (n：負の整数)
  (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ (m：正の整数)
  (4) $(x^r)'$ (r：有理数)
  (5) $(x^\alpha)'$ (α：実数)

- **三角関数**
  $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$

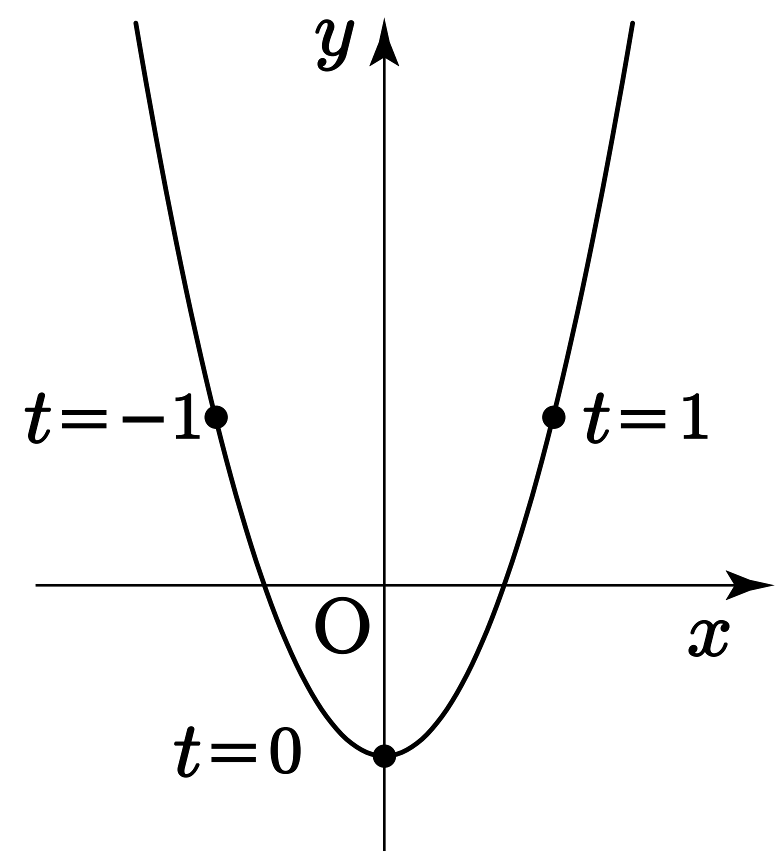
- **対数関数・指数関数**
  $(\log_a x)', (a^x)'$

曲線の媒介変数表示に向って

　xy 平面上を動く点Pがあり，その座標 $(x,\ y)$ が，1つの変数 t を用いて

　$x = 2t,\quad y = 4t^2 - 2$

で表されているとする．



　たとえば，$t = -1, 0, 1$ とすると，P の座標がそれぞれ

　$(\quad,\quad), (\quad,\quad), (\quad,\quad)$

となる．

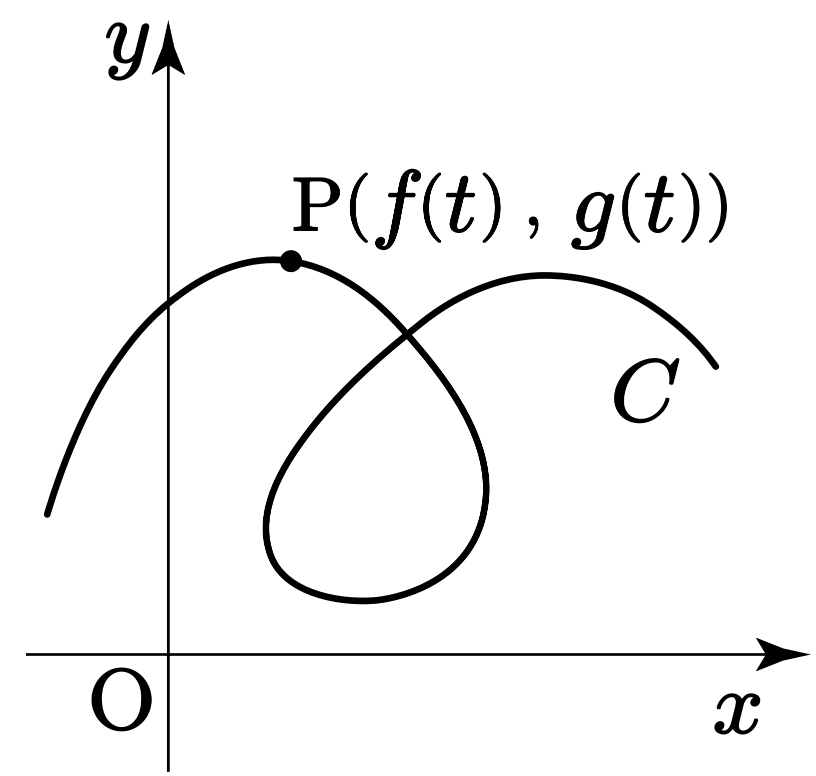
　変数 t をすべての実数値をとるように連続的に変化させていくと，これに対応して点P が平面上に曲線を描く．

曲線の媒介変数表示

一般に，曲線 C 上の点の座標 $(x,\ y)$ が変数 t の関数として

$$x = f(t),\ y = g(t) \cdots (*)$$

で与えられているとき，$(*)$ を，t を **媒介変数** とする C の **媒介変数表示** という.



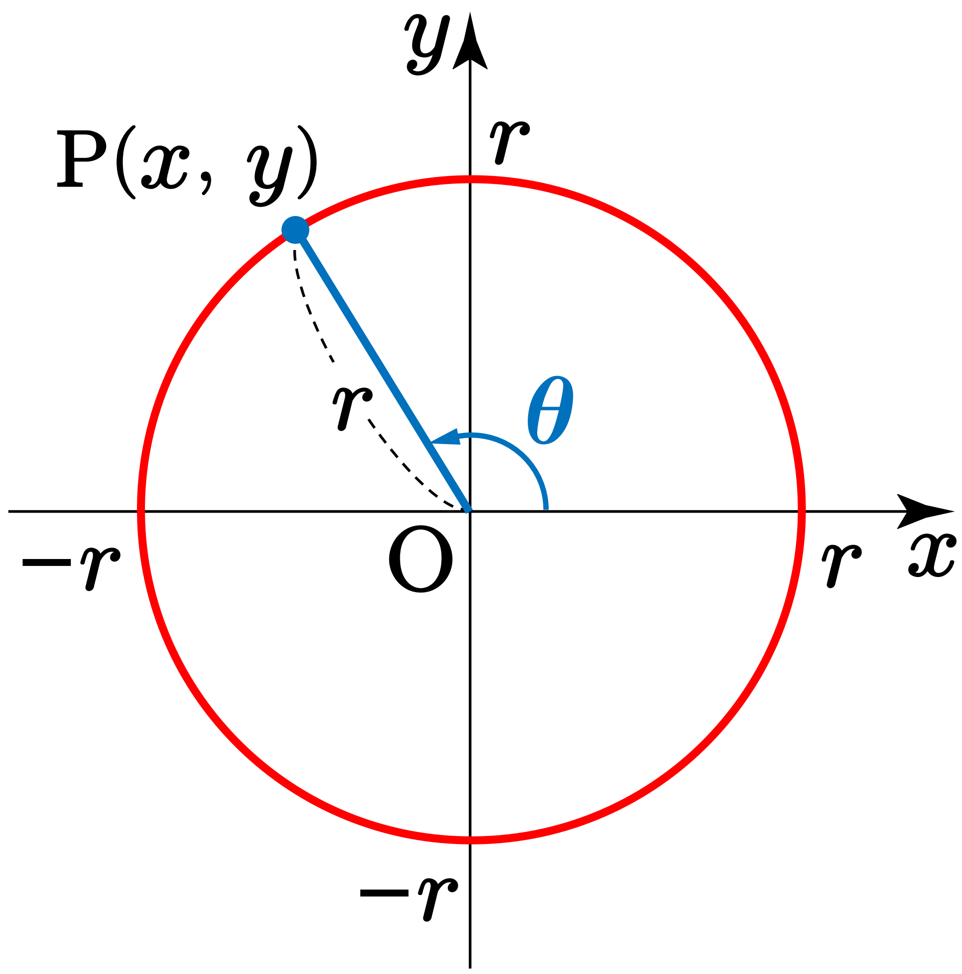
注　媒介変数は parameter[英] の訳語である.

例　$x = 2t,\ y = 4t^2 - 2$ は，放物線 $y = x^2 - 2$ の媒介変数表示の一つである.

円の媒介変数表示

円 $C : x^2 + y^2 = r^2$　(r は正の定数) 上の点Pの座標を $(x,\ y)$ とし，動径OPの表す角を θ とすれば，三角関数の定義から

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



これは，θ を媒介変数とする円 C の媒介変数表示の一つである．

媒介変数で表された関数の微分公式

媒介変数表示 $x=f(t), y=g(t)$ によって，x から y への関数が与えられる場合，合成関数と逆関数の微分法から，$\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \text{ただし，} f'(t) \neq 0$$

媒介変数表示された関数の導関数の例

◪ x, y の関係が t を媒介変数として

$$x = 2t - 1, \qquad y = 4t^2 - 2$$

で与えられているとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} =$$

◪ x, y の関係が θ を媒介変数として

$$x = 3\cos\theta, \qquad y = 3\sin\theta$$

で与えられているとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$