

第3章 「微分法」

11. 対数関数の微分公式

hm3-3-11

(pdf ファイル)

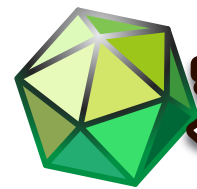
微分法の学習マップ

微分の理論

- 微分の基礎概念
微分係数, 導関数
微分可能性, 高次導関数
- 微分の基本公式
 - (1) 微分の線型性
 - (2) 積の微分法
 - (3) 商の微分法
 - (4) 合成関数の微分法
 - (5) 逆関数の微分法
 - (6) 対数微分法
 - (7) 陰関数の微分法
 - (8) 媒介変数表示された関数の微分法

計算としての微分

- べき乗関数
 - (1) $(x^n)'$ (n : 負でない整数)
 - (2) $(x^n)'$ (n : 負の整数)
 - (3) $(x^{\frac{1}{m}})'$ (m : 正の整数)
 - (4) $(x^r)'$ (r : 有理数)
 - (5) $(x^\alpha)'$ (α : 実数)
- 三角関数
 $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$
- 対数関数・指数関数
 $(\log_a x)', (a^x)'$



対数関数の導関数

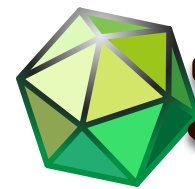
この定数 e を用いると, $\log_a x$ (a は 1 でない正の定数) の導関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \{\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}\} \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a} \end{aligned}$$

とくに, $a = e$ とすれば, 次のようになる.

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x \log_e e} = \frac{1}{x}$$

e を底とする対数を **自然対数** といい, e を **自然対数の底** という. 自然対数 $\log_e x$ については, **底 e を省略** して, これを単に **$\log x$** と書くことが多い.



対数関数の微分公式

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

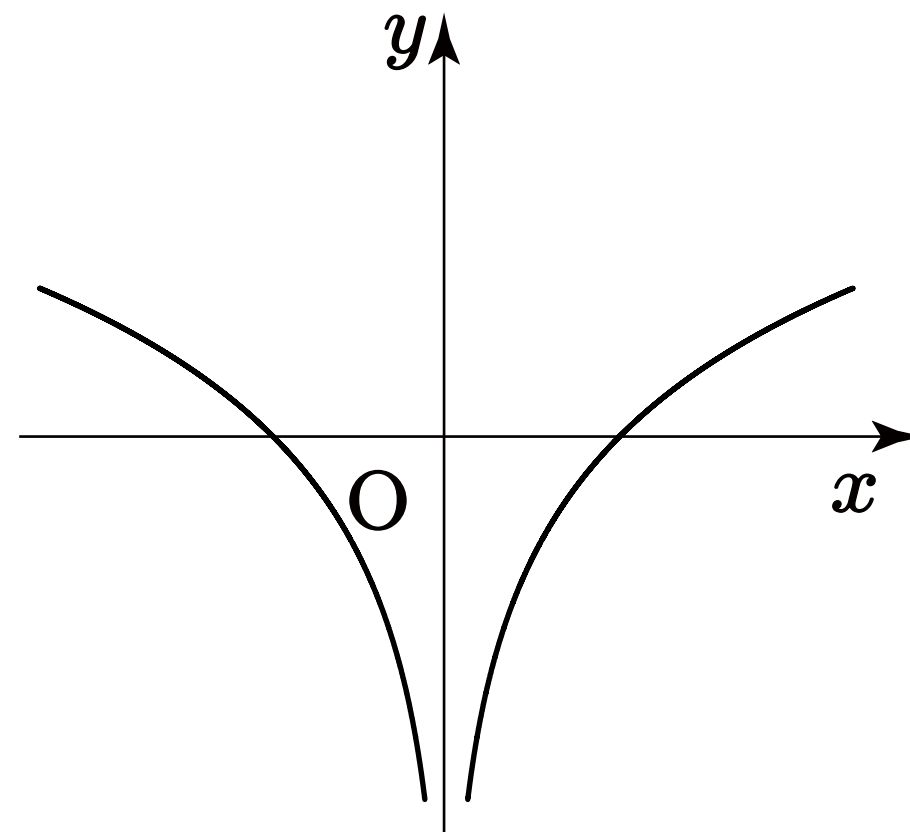
これから、また、

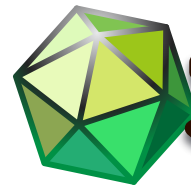
$$\{\log(-x)\}' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

したがって、また、

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$





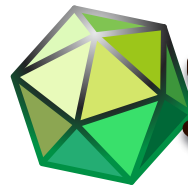
対数関数の微分公式の応用

関数 $y = f(x)$ が微分可能のとき, $f(x) \neq 0$ である x の範囲において, 合成関数の微分法を用いると, 次の関係が得られる.

$$(\log |y|)' = \frac{y'}{y}, \text{ すなわち } (\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$



$$(\log |3x - 2|)' =$$



対数微分法

関数 $y = \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3}$ を微分するために、ま

ず、両辺の絶対値の対数をとると、

$$\log |y| = \log \left| \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3} \right|$$

$$\therefore \log |y|$$

$$=$$

この両辺を x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-1} \text{ から}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-1} \right) \cdot y \\ &= \frac{6}{(x+1)(x-2)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3} \\ &= \end{aligned}$$

 商の導関数の公式を用いて微分するよりも，幾分，計算が簡単である．

$y = x^\alpha (x > 0)$ の導関数

α を実数の定数とするとき、区間 $x > 0$ で定義された関数 $y = x^\alpha$ の導関数は、対数微分法を利用して求められる。

$y = x^\alpha$ の両辺は正であるから、それぞれの対数をとると

$$\log y =$$

両辺を x で微分すると

ゆえに、

$$y' =$$

x^α の導関数

α が実数の定数であるとき

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\text{ただし, } x > 0)$$