

第3章 「微分法」

10. 自然対数

---

hm3-3-10

(pdf ファイル)

# 微分法の学習マップ

## 微分の理論

- 微分の基礎概念  
微分係数, 導関数  
微分可能性, 高次導関数
- 微分の基本公式
  - (1) 微分の線型性
  - (2) 積の微分法
  - (3) 商の微分法
  - (4) 合成関数の微分法
  - (5) 逆関数の微分法
  - (6) 対数微分法
  - (7) 陰関数の微分法
  - (8) 媒介変数表示された関数の微分法

## 計算としての微分

- べき乗関数
  - (1)  $(x^n)'$  ( $n$ : 負でない整数)
  - (2)  $(x^n)'$  ( $n$ : 負の整数)
  - (3)  $(x^{\frac{1}{m}})'$  ( $m$ : 正の整数)
  - (4)  $(x^r)'$  ( $r$ : 有理数)
  - (5)  $(x^\alpha)'$  ( $\alpha$ : 実数)
- 三角関数  
 $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$
- 対数関数・指数関数  
 $(\log_a x)', (a^x)'$

# 対数関数の導関数に向けて

対数関数  $\log_a x$  の導関数は、定義に従えば、

$$(\log_a x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + h) - \log_a x}{h}$$

ここで、 $\frac{h}{x} = t$  (すなわち、 $h = xt$ ) とおくと、  
 $h \rightarrow 0$  のとき、 $t \rightarrow 0$  であるから、上の極限值は  
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t} \log_a(1 + t) = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\}$$
  
となる。 よって、問題は、定数  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}$  である。

# 微小な $t$ の値に対する $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の値

| $t$       | $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ | $t$        | $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ |
|-----------|-----------------------|------------|-----------------------|
| 0.1       | 2.59374...            | -0.1       | 2.86797...            |
| 0.01      | 2.70481...            | -0.01      | 2.73199...            |
| 0.001     | 2.71692...            | -0.001     | 2.71964...            |
| 0.0001    | 2.71814...            | -0.0001    | 2.71841...            |
| 0.00001   | 2.71826...            | -0.00001   | 2.71829...            |
| 0.000001  | 2.71828...            | -0.000001  | 2.71828...            |
| 0.0000001 | 2.71828...            | -0.0000001 | 2.71828...            |
| ...       | ...                   | ...        | ...                   |



# $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ の値

$t \rightarrow 0$  のとき  $(1+t)^{\frac{1}{t}}$  は一定の値に限りなく近づき、その値は

2.71828182845904523536028747135...

である。

この極限値を  $e$  で表す。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

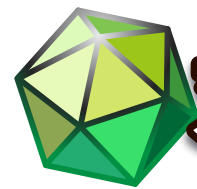
$e$  は、**Eulerの定数** あるいは **自然対数の底** と呼ばれ、これが無理数であることも証明できる。



Leonhard Euler  
1707-1783



「無限解析序説」(1748)の扉



## 対数関数の導関数

この定数  $e$  を用いると,  $\log_a x$  ( $a$  は 1 でない正の定数) の導関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \{\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}\} \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a} \end{aligned}$$

とくに,  $a = e$  とすれば, 次のようになる.

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x \log_e e} = \frac{1}{x}$$

$e$  を底とする対数を **自然対数** といい,  $e$  を **自然対数の底** という. 自然対数  $\log_e x$  については, **底  $e$  を省略** して, これを単に  **$\log x$**  と書くことが多い.