

第2章 「極限」

8. はさみうちの原理

hm3-2-8

(pdf ファイル)

挟み撃ちの原理

数列 $\{x_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において,

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

これを ^{はさ}挟み撃ちの原理 という.



挟み撃ちの原理の変種

数列 $\{a_n\}$, $\{x_n\}$ において,

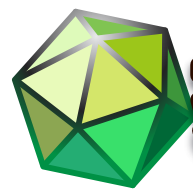
■ 「 $a_n \leq x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 」

ならば, 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 」

■ 「 $x_n \leq a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 」

ならば, 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 」

いわば, 「追い出しの原理」である.



挟み撃ちの原理の応用

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{3}$ は存在しないが, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3}$ は, 容易に求められる.

すべての自然数 n に対して,

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{3} \leq 1$$

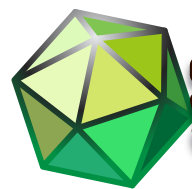
$$\therefore -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \leq \frac{1}{n}$$

が成り立つ.

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ である

から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = 0$$



挟み撃ちの原理についての注意

$x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3}$ とすると, すべての自然数 n に対して

$$-\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}$$

が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

教訓 すべての自然数 n に対して, 等号のつかない不等式 $a_n < b_n$ が成立しても, 極限においては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

となる場合がある.