数学 III

第２章　「極限」

7. 不定形

hm3-2-7

(pdf ファイル)

EDUPA

数列の極限の学習マップ

- 基礎概念
  - 収束と発散
  - 極限値
  - ∞ (無限大)
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ の性質
- $\infty-\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形
- 等比数列の極限

- 無限級数の定義
  - 収束と発散
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ の性質
- 無限等比級数
- 無限級数の
  - 収束の必要条件
  - 発散の十分条件

発散する数列の極限について

極限値の基本性質の公式のいくつかは，発散する数列についても成立すると考えることができる．

たとえば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

のとき，次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty \ , \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$$

これらは，∞ についての計算として

$$\infty + \infty = \infty, \qquad \infty \times \infty = \infty$$

と考えることができるということである．

しかし，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ や，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ には適用できない．

$\infty-\infty$ の不定形

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$
は，具体的な $\{a_n\},\{b_n\}$ によって異なる．

- $a_n=2n,\ b_n=n+1$ のとき，

  $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=$$

- $a_n=n,\ b_n=2n$ のとき，

  $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=$$

- $a_n=n+1,\ b_n=n+\dfrac{1}{n}$ のとき，

  $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=$$

このような事態を「 $\infty-\infty$ の不定形 」という．

$\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$の不定形

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ は，具体的な $\{a_n\},\{b_n\}$ によって異なる．

◪ $a_n=n^2-1$，$b_n=n+1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$

◪ $a_n=2n^3+n^2,\ b_n=n^3+5n$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$$

◪ $a_n=n^2-3n,\ b_n=n^3+1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$

このような事態を「 $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形 」という．

同様に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=0$ のとき，a_nb_n の極限は不明である．これを「$\infty\cdot 0$ の不定形」という．